Questions d'intérêts composés, impôt progressif sur les successions, d'après M.C. Lamé

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 360-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__360_1>

QUESTIONS D'INTÉRÊTS COMPOSÉS,

impôt progressif sur les successions, d'après M. C. Lamé
(Compte rendu 1848, 2e sem., p. 125).

I. *Problème.* Un travailleur fait chaque année a francs d'économie, et il place cette épargne annuelle à intérêt de r pour *un*; au bout de combien n d'années aura-t-il un capital dont le revenu annuel soit égal à son épargne annuelle ?

Solution. Au bout de n années, les épargnes placées vaudront :

$$a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots a(1+r)^{n-1} = \frac{a}{r}[(1+r)^n - 1];$$

or le capital qui rapporte a d'intérêt annuel est $\frac{a}{r}$, donc :

$$\frac{a}{r}[(1+r)^n - 1] = \frac{a}{r}; \text{ d'où l'on tire } n = \frac{\log 2}{l(1+r)}.$$

Observation. Si la somme a suffit aux besoins annuels du travailleur, il pourra se retirer après n années et vivre de la rente annuelle de son capital.

II. *Problème.* Mêmes données que le problème précédent; on demande combien d'années n' il doit encore travailler après les n années pour que le capital rapporte une rente double de l'épargne annuelle?

Solution. Le capital acquis $\frac{a}{r}$ vaudra au bout de n' années $\frac{a}{r}(1+r)^{n'}$, et les épargnes annuelles vaudront $\frac{a}{r}[(1+r)^{n'}-1]$; on a donc :

$$\frac{a}{r}(1+r)^{n'}+\frac{a}{r}[(1+r)^{n'}-1]=\frac{2a}{r}; \text{ d'où } n'=\frac{\log\frac{3}{2}}{l(1+r)}.$$

Observation. On a $n'<n$; ainsi il faut moins d'années pour acquérir le second capital $\frac{a}{r}$ que pour le premier, ce qui est évident *à priori*. Si donc $\frac{2a}{r}$ suffisent à la dépense annuelle, le travailleur pourra se retirer après $n+n'$ années.

III. *Problème.* Mêmes données; combien d'années doit-il encore travailler pour acquérir un capital qui rapporte $3a$?

Solution. On a $\frac{2a}{r}(1+r)^{n''}+\frac{a}{r}[(1+r)^{n''}-1]=\frac{3a}{r}$; d'où :

$$n''=\frac{\log\frac{4}{3}}{l(1+r)}.$$

Observation. On a $n''<n'<n$; le troisième capital $\frac{a}{r}$ est donc plus tôt gagné que le second.

IV. *Facilités d'acquisition. Moins* il faut d'années pour former un capital, et *plus* la facilité est grande; si donc nous convenons de représenter par 1 la facilité d'acquérir le premier capital $\frac{a}{r}$, les facilités d'acquérir les capitaux $\frac{2a}{r}$, $\frac{3a}{r}$, etc., seront présentées par $\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$, $\frac{\log 2}{\log \frac{4}{3}}$, $\frac{\log 2}{\log \frac{5}{4}}$, etc.

V. *Succession.* Parmi tous les êtres organisés de la création, l'homme est le seul qui ait le sentiment de son existence passagère. La quantité de travail nécessaire pour subvenir aux besoins d'une vie courte et précaire est assez restreinte ; mais la sollicitude pour les besoins de la famille, sollicitude qui s'étend bien au delà de l'individu, est le plus puissant stimulant providentiel pour un travail continu et prolongé. La transmission garantie du produit, après la mort du travailleur, constitue le droit de succession et la base fondamentale du contrat social (*) ; car la société civilisée n'est pas une agrégation d'individus, une bande, mais une connexion de familles, une nation. *L'unité sociale*, c'est la famille ; unité, qu'un même signe vocal, que le même nom sert à désigner et à dénommer, et qui établit entre les individus une solidarité morale ; détruisez cette unité, les nations deviennent des troupeaux sans nom.

VI. Un *capital* est la représentation légale du salaire d'un travail *quelconque* exécuté dans un temps passé, et aussi la représentation du payement d'un travail *quelconque* à opérer dans un temps à venir. Une distribution trop uniforme de capitaux entre toutes les familles détruirait toute émulation, rendrait impossible l'exécution des travaux pénibles ou rebutants, entraverait le progrès des beaux-arts, amènerait un retour à la barbarie. Une trop grande inégalité dans cette distribution devient une source de vices, de misères et d'avi-

(*) L'abolition du droit d'héritage est la proposition la plus anti-sociale de ceux qui se nomment *socialistes* par antiphrase.

lissements de tout genre. Les institutions sociales doivent combattre ces deux extrêmes. En laissant une liberté complète à la concurrence et aux entreprises de l'esprit industriel, on évite le premier extrême; alors les capitaux se portent à l'endroit de la plus grande intelligence, de la plus grande activité, de la plus grande économie : ce qui doit être. Pour empêcher un excès d'accumulation, il faut proscrire les majorats, les substitutions, prescrire le partage égal des successions, et faire de *gros* prélèvements sur les *gros* capitaux au bénéfice de la masse commune, du trésor public, destiné à l'exécution des travaux d'un intérêt national. Quel rapport établir entre le prélèvement et le capital? Jusqu'ici on a toujours admis le rapport commercial, le rapport géométrique; mais l'accroissement des grands capitaux s'opérant plus facilement que celui des petits (§ III), il semble qu'il n'est plus équitable d'admettre dans les prélèvements la simple proportionnalité commerciale. Appliquant ces considérations aux successions, M. Lamé est d'avis de laisser subsister le rapport géométrique pour les *petits* capitaux et d'imposer les grands capitaux en raison directe de la facilité à les acquérir, et voici comment il procède : Soient A la limite des petits capitaux et c le prélèvement pour cent; ainsi une succession égale ou inférieure à A paye $\frac{cA}{100}$; soit maintenant une succession iA, i étant un nombre entier, on partage cette somme en i parts égales : la première part A paye $\frac{cA}{100}$, la facilité à acquérir cette part étant représentée par 1, celle d'acquérir la seconde part est représentée par $\frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$; ainsi cette deuxième part paye $\frac{cA}{100} \frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}}$, et par le même raisonnement, la troisième part paye $\frac{cA}{100}\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}$; donc toute la succession devra payer :

$$\frac{cA}{100}\left(1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}+\ldots\frac{\log 2}{\log\frac{i+1}{i}}\right),$$

mais l'on a à peu près :

$$\frac{1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\ldots\frac{\log 2}{\log\frac{i+1}{i}}}{i}=1+0,35(i-1); \qquad (a)$$

donc le prélèvement à faire est $\frac{icA}{100}[1+0,35(i-1)]$.

M. Lamé prend A égal à cinquante mille francs, et c égal à 1 ; il admet que l'activité de l'homme ne pouvant guère s'exercer que pendant une vingtaine d'années, il faut adopter 20 pour la limite de i, ce qui donne 8 0/0 pour un héritage d'un million, et le même rapport est à conserver pour des héritages plus considérables. Le mémoire se termine ainsi : « Si l'on adoptait cette échelle des droits d'enregistrement pour les héritages en ligne directe, il faudrait sans doute la doubler pour les héritages collatéraux, et les quadrupler si les héritiers étaient étrangers à la famille du donataire. »

VII. On a :

$$\log\frac{i+1}{i}=2M\left[\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2i+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2i+1}\right)^5+\text{etc.}\right],$$

où M représente le module. Calculant log 2 avec trois termes, log 4 et log 5 avec deux termes, et les logarithmes suivants avec un terme de la série, on trouve :

$$\log 2=2M.\,0,34645;\ \frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}=1,70951;\ \frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}=2,40942;$$

$$\log\frac{5}{4}=\frac{2M}{9};\ \log\frac{6}{5}=\frac{2M}{11};\ \log\frac{7}{6}=\frac{2M}{13};\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, dans le premier membre de la formule (a), il devient

$$\frac{1}{i}\left[5{,}11893+0{,}34645\,(9+11+13+\ldots.2i+1)\right]$$

$$=0{,}34645\,(i+2)-\frac{0{,}07782}{i}$$

$$=1+0{,}34645\,(i-1)+0{,}03935-\frac{0{,}07782}{i}$$

$$=1+0{,}35\,(i-1)-0{,}00355\,(i-1)+0{,}03935-\frac{0{,}07782}{i}$$

$$=1+0{,}35\,(i-1)+0{,}0429-\left(0{,}00355i+\frac{0{,}07782}{i}\right),$$

Nous devons à l'obligeance de M. Koralek (Philippe) cette première *vérification* de la formule de M. Lamé. Nous rappelons à cette occasion que ce professeur étranger est auteur d'une méthode pour calculer les logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques avec une extrême promptitude (*voir* t. VI, p. 475). Il y a plus d'une année que l'auteur a présenté son travail à l'Académie, sans pouvoir obtenir un bout de rapport. Lorsqu'on voit qu'on fait à cette docte assemblée des rapports sur le moyen d'abréger la soustraction des fractions en arithmétique, et sur d'autres propositions de même importance, on a lieu d'être *grandement* surpris qu'on ne veuille pas dire un mot sur un procédé qui fait obtenir des logarithmes de nombres entiers et des lignes trigonométriques avec 7 décimales exactes en quelques minutes. J'en ai fait plusieurs essais qui ont réussi ; le silence du rapporteur désigné est d'autant moins explicable qu'il est connu pour son extrême habileté dans les calculs numériques ; qualité pré-

(*) La souscription à la traduction d'un ouvrage par M. Koralek, annoncée (t. VI, p. 475), est toujours ouverte chez M. Bachelier, libraire à Paris, et chez l'auteur, 59, rue du Faubourg-Poissonnière. Sa méthode logarithmique est jointe à cet ouvrage.

cieuse et des plus rares que l'illustre géomètre a encore en commun avec Euler le Grand. Il serait pénible d'admettre pour cette explication des motifs étrangers à la science.

Depuis que ceci est écrit, un de nos analystes, le plus versé dans la doctrine des suites, a pris la série de M. Lamé pour sujet de ses savantes investigations (*Comptes rendus*, août 1848, p. 99). M. J. Binet, cherchant la sommation de la série dont le terme général est $\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, et rejetant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^3}$, parvient à cette expression :

$$1 + 0{,}35\,(i - 1) + 0{,}04315 - 0{,}00343i,\ \text{etc.}$$