LENTHÉRIC

Théorie générale des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjugués, des lignes et surfaces du deuxième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 352-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__352_1>

THÉORIE GÉNÉRALE

des pôles, polaires, plans polaires et polaires conjugués, des lignes et surfaces du deuxième ordre,

PAR M. LENTHÉRIC, NEVEU,
Professeur.

---

§ I.

I. Soit

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+K=0 \text{ ou } F(x,y)=0 \quad (1)$$

l'équation générale des lignes de deuxième ordre.

On sait que, lorsqu'on mène une tangente à la courbe par un point α,β de son plan, les coordonnées du point de contact sont déterminées par les deux équations :

$$F(x,y)=0, \quad F'_y(\beta-y)+F'_x(\alpha-x)=0.$$

La seconde, ajoutée au double de la première, s'abaisse au premier degré et devient :

$$\beta F'_y+\alpha F'_x+Dy+Ex+2K=0; \quad (2)$$

équation d'une droite passant sur les deux points de contact, et que nous appellerons la *corde de contact.*

Cela posé, supposons que le point α, β, par lequel on mène la tangente, se meuve sur une droite

$$y=mx+n \quad (3)$$

située d'une manière quelconque dans le plan de la courbe, on aura entre α et β la relation $\beta = m\alpha + n$; et substituant cette valeur de β dans l'équation (2), il en résultera :

$$(mF'_y + F'_x)\alpha + nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0, \qquad (4)$$

qui sera l'équation générale de toutes les cordes de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (3).

Or, la forme seule de l'équation (4) montre que toutes les droites qu'elle représente se coupent en un même point sur la droite fixe

$$mF'_y + F'_x = 0,$$

car les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec l'une quelconque de celles que représente l'équation (4), en faisant varier α, sont données par les deux équations :

$$mF'_y + F'_x = 0 \qquad (5)$$

$$nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0, \qquad (6)$$

qui ne contiennent pas la variable α.

L'équation (5) représentant, comme l'on sait, le diamètre conjugué de la direction $y = mx$, qui est celle de la droite donnée, il en résulte ce théorème, découvert par La Hire :

Si sur tous les points d'une droite située d'une manière quelconque dans le plan d'une ligne du deuxième ordre on mène des tangentes à la courbe : 1° *toutes les cordes de contact concourront en un même point ;* 2° *ce point sera situé sur le diamètre conjugué de la direction de la droite.*

Ce point a été appelé, par M. Servois, le pôle de la droite ; et l'on voit qu'à une droite quelconque, donnée sur le plan de la courbe, correspondra toujours un pôle dont les équations (5) et (6) détermineront les coordonnées en y remplaçant m et y par les coefficients de la droite donnée.

II. Réciproquement soient a, b les coordonnées d'un point quelconque du plan de la courbe ; en faisant $x = a$, $y = b$ dans les équations (5) et (6), on en déduira $m = -\frac{F'_a}{F'_b}$,

$y = -\frac{Db + Ea + 2K}{F'_b}$; et substituant ces valeurs dans (3), il en résultera une droite

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0, \qquad (7)$$

qui aura pour pôle le point $(a\ b)$; d'où résulte cet autre théorème réciproque du précédent :

Si par un point quelconque du plan d'une courbe de deuxième ordre on mène des sécantes à la courbe et que sur les points d'intersection de chacune d'elles on mène des tangentes : 1° *les points de concours des tangentes, qui correspondent à la même sécante, seront sur une même droite;* 2° *cette droite sera parallèle au conjugué du diamètre qui passe par ce point.*

Cette droite a été appelée, par M. Gergonne, la *polaire* du point, et on voit qu'à un point quelconque du plan de la courbe correspondra toujours une polaire, dont on obtiendra l'équation en remplaçant dans (7) a et b par les coordonnées de ce point.

III. La polaire étant $y = mx + n$ (3), nous avons vu que le pôle était déterminé par les deux équations :

$$mF'_y + F'_x = 0 \ (5), \quad nF'_y + Dy + Ex + 2K = 0 \ (6),$$

donc chacune ne contient que l'une des constantes m et n de la polaire. Il résulte de là :

1° Que (5) est le lieu géométrique des pôles de la droite (3) lorsque m restant constant on fait varier n; mais alors la polaire se meut parallèlement à elle-même, et (5) est le diamètre conjugué de la direction ; donc :

Le lieu géométrique des pôles d'un système de droites parallèles est le diamètre conjugué à leur direction.

2° Que (6) est le lieu géométrique des pôles de la droite (3) lorsque n restant constant, on y fait varier m; mais alors la droite (3) passe constamment par le point fixe (o, n), et l'équation (7) montre que l'équation (6) est la polaire du point fixe; donc :

Le lieu géométrique des pôles d'un système de droites qui se coupent au même point, est la polaire de ce point.

Et de ces deux théorèmes nous pouvons conclure réciproquement les deux suivants :

Si le pôle se meut suivant un diamètre, la polaire se meut parallèlement à son conjugué.

Si le pôle se meut suivant une droite quelconque du plan de la courbe, la polaire tourne autour du pôle de cette droite.

IV. Cherchons maintenant la position relative du pôle et de la polaire sur le plan de la courbe; comme elle est évidemment indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels, que celui des x soit le diamètre conjugué de la polaire et par conséquent passe par le centre et le pôle, et que celui des y soit une tangente parallèle à la polaire; alors l'équation (1) de la courbe se réduira à la forme :

$$Ay^2 + Cx^2 + Ex = 0.$$

L'abscisse du centre sera donnée par l'équation dérivée en x :

$$2Cx + E = 0, \text{ d'où } x = -\frac{E}{2C};$$

cette abscisse sera la longueur du demi-diamètre conjugué de la polaire; en représentant cette longueur par d, on aura :

$$d = -\frac{E}{2C}.$$

L'équation (7) de la polaire, rapportée aux nouveaux axes, deviendra :

$$(2Ca + E)x + Ea = 0, \text{ d'où } x = -\frac{Ea}{2Ca + E};$$

x désignant la distance de la polaire à l'origine. Appelant ν la

distance de la polaire au centre, on aura $\mu = -\frac{Ea}{2Ca+E} + \frac{E}{2C}$,
ou réduisant :

$$\mu = \frac{E^2}{2C(2Ca+E)}.$$

La distance du pôle à l'origine étant a, en appelant μ' la distance du pôle au centre, on aura $\mu' = a + \frac{E}{2C}$, ou réduisant :

$$\mu' = \frac{2Ca+E}{2C};$$

or, en faisant le produit des deux distances μ, μ', il vient $\mu \times \mu' = \frac{E^2}{4C^2}$; et comme $d = -\frac{E}{2C}$ donne aussi $d^2 = \frac{E^2}{4C^2}$, il en résulte cette relation remarquable :

$$\mu \times \mu' = d^2. \tag{8}$$

Ainsi, dans les courbes qui ont un centre, c'est-à-dire *dans l'ellipse ou l'hyperbole, le pôle d'une droite est situé sur le diamètre conjugué de la direction de cette droite, de manière que le demi-diamètre est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et du centre à la droite, ces distances étant mesurées sur le diamètre.*

Dans le cas de la parabole, on a de plus $C = 0$, et l'équation de la polaire se réduira à $x = -a$; ainsi :

Dans la parabole, la partie du diamètre comprise entre le pôle et la droite a son milieu sur la courbe.

Cette propriété de la parabole et la relation (8) donnent un procédé très-simple pour construire, soit la polaire lorsque l'on connaît le pôle, soit le pôle lorsque l'on connaît la polaire, dans chacune des courbes du deuxième degré.

Pour le cercle, le diamètre serait perpendiculaire à la polaire, et la relation (8) aurait toujours lieu.

Ce qui précède conduit à ces conséquences, qu'il suffira d'énoncer : *La polaire étant extérieure, le pôle est intérieur, et réciproquement ; la polaire s'éloignant du centre, le pôle s'en rapproche, et réciproquement ; la polaire passant par le centre, le pôle est à l'infini, et réciproquement ; la polaire étant tangente, le pôle est au point de contact, et réciproquement ; si le pôle est sur la courbe, la droite est tangente dans ce point.*

On sait que la relation (8) existe pour l'ellipse et l'hyperbole entre le demi-grand axe et les distances du centre au foyer et à la directrice voisine ; on sait que dans la parabole le sommet est à égale distance du foyer et de la directrice ; ainsi :

Dans toutes les courbes du deuxième ordre, la directrice a pour pôle le foyer ; ce qui justifie la dénomination de *polaire focale*, que M. Poncelet a proposé, avec raison, de donner à la directrice.

V. Revenons à l'équation de la polaire :

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0 ; \quad (7)$$

en y remplaçant F'_b et F'_a par leurs valeurs, elle devient :

$$(2Ab + Ba + D)y + (Bb + 2Cx + E)a + Dy + Ex + 2K = 0,$$

et ordonnant par rapport à a et b :

$$(2Ay + Bx + D)b + (By + 2Ca + Ex) + Db + Ex + 2K = 0,$$

ou $$bF'_y + aF'_x + Dy + Ex + 2K = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (2) de la corde de contact relative au point $\alpha.\beta$, on voit que :

La polaire d'un point est la corde de contact qui correspond à ce point ; donc *le pôle d'une droite est l'intersection commune des polaires de tous les points*, et par conséquent *si un point est situé sur une droite, la polaire passe sur le pôle de cette droite*, ce que nous savions déjà (3).

Réciproquement *le point de concours de deux tangentes est le pôle de la corde de contact ;* donc *la polaire d'un point est le lieu géométrique des pôles de toutes les droites qui passent sur* *ce point;* par conséquent, *si une droite passe par le pôle d'une autre droite, son pôle se trouvera sur cette autre droite*, ce que nous savions déjà (3).

VI. L'identité de l'équation de la polaire d'un point avec la corde de contact relative à ce point, ayant lieu quelle que soit la position du point et par conséquent lors même que la corde de contact n'existerait pas, nous devons en conclure que la polaire est un lieu géométrique dont la corde de contact n'est qu'un cas particulier.

Et en effet, soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+K=0$, (1) l'équation des lignes de deuxième ordre rapportées à des axes quelconques, appelons $\alpha.\alpha'$ les longueurs des segments compris sur l'axe des x entre l'origine et la courbe; ces longueurs seront les racines de l'équation du deuxième ordre, que l'on obtient en faisant $y=0$ dans (1), ce qui donne :

$$Cx^2+Ex+K=0,$$

on aura donc :

$$\alpha+\alpha'=-\frac{E}{C},\quad \alpha\alpha'=\frac{K}{C}.$$

De même $\beta.\beta'$ désignant les longueurs des segments sur l'axe des y, qui sont données par l'équation du deuxième degré

$$Ay^2+Dy+K=0,$$

on aura :

$$\beta+\beta'=-\frac{D}{A},\quad \beta\beta'=\frac{K}{A}.$$

La droite qui détermine sur les axes deux des segments $\alpha.\beta'$, a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta'}=1;$$

de même celle qui détermine les deux autres segments $\alpha'.\beta$, a pour équation

$$\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}=1.$$

En ajoutant les équations des deux droites, il en résultera celle d'une troisième droite, qui passera par le point de concours des deux premières; donc les deux droites se coupent sur la troisième droite :

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}x+\frac{\beta+\beta'}{\beta\beta'}y=2.$$

Cette équation, en substituant pour $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ leurs valeurs ci-dessus, devient :

$$\mathrm{D}y+\mathrm{E}x+2\mathrm{K}=0,$$

et l'équation (7) fait voir qu'elle représente la polaire de l'origine; donc sa position est indépendante de la direction des axes, et il en résulte cette conséquence :

Si par un point fixe pris arbitrairement sur le plan d'une courbe de deuxième ordre, on mène deux sécantes quelconques à la courbe et que l'on joigne par des cordes un point de section de l'une des sécantes avec un point de section de l'autre, et de même les deux autres points de section, le lieu géométrique des intersections de ces cordes, lorsque l'on fera tourner les sécantes autour du point fixe, sera une droite qui aura le point fixe pour pôle.

Donc, si parmi ces sécantes deux peuvent devenir tangentes, les points de contact seront sur la polaire et en détermineront la position, ce qui explique l'identité de l'équation de la polaire avec celle de la corde de contact.

C'est de ce théorème, qui pourrait servir de point de départ à cette théorie, que l'on rendrait ainsi indépendante de celle des tangentes, que dérive la dénomination de pôle (du verbe grec qui signifie *tourner*), introduite en 1811 par M. Servois dans la science.

Il en résulte un procédé facile pour construire, *avec la règle seulement*, soit la polaire lorsque le pôle est donné, soit le pôle lorsque la polaire est donnée.

En effet, si par un point on mène deux sécantes à la courbe, les cordes qui joindront les points d'intersection réciproques deux à deux, se couperont sur la polaire du point et en détermineront la position.

Si une droite étant donnée, on conduit, comme nous venons de l'expliquer, les polaires de deux points de cette droite, ces polaires passeront pas le pôle de la droite et le détermineront par leur intersection.

N. B. Deux droites qui se coupent ou deux parallèles n'étant que des cas particuliers des courbes que comprend l'équation générale (1), chacun des théorèmes que nous avons établis donne un théorème correspondant de la théorie des transversales. (*La fin prochainement.*)