NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème de Mascheroni sur l'aire d'un polygone rectiligne plan

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 348-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__348_0>

THÉORÈME DE MASCHERONI

sur l'aire d'un polygone rectiligne plan.

I. *Notation.* Les angles intérieurs consécutifs du polygone sont désignés par les lettres consécutives A, B, C, D... L, M, N, et les angles extérieurs correspondants par A', B', C', D'... L', M', N'; de sorte que pour un angle saillant A, l'on a $A'=\pi-A$, et pour un angle rentrant $A'=A-\pi$, et ainsi des autres. Chaque côté est indiqué dans l'ordre naturel des lettres et non à l'inverse : ainsi AB, CD... et non BA ou DC. Cette observation est importante pour l'application de la formule.

II. *Lemme.* $A'+B'+C'+\ldots L'+M'+N'=2\pi$; ainsi le sinus de la somme d'un nombre quelconque de ces angles extérieurs est égal au sinus de la somme des angles restants, ce sinus étant pris négativement.

III. *Théorème.* Le double de la surface d'un polygone rectiligne est égal à la somme des rectangles de ses côtés, excepté un, pris deux à deux par les sinus des sommes des angles extérieurs compris entre eux.

Démonstration. Soit S l'aire :

1° *Triangle.* ABC ; $2S=AB.BC.\sin B'$.

2° *Quadrilatère.* ABCD (*fig.* 47). Menons la diagonale AC ; prolongeons les côtés AB, CD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en O, et abaissons les perpendiculaires AP et BQ sur le côté CD, on a :

$$ABCD=ABC+ACD\,;$$

$$2ACD=CD.(AB+BO)\sin O=AB.CD\sin(B'+C')+CD.BQ\,;$$

$$CD.BQ=BC.CD.\sin C'\,;$$

donc

$$2S = AB.BC \sin B' + AB.CD \sin (B' + C') + BC.CD \sin C'.$$

IV. *Pentagone.* ABCDE (*fig.* 48). Menons la diagonale AD, prolongeons les côtés AB et DE jusqu'à leur rencontre en O, et abaissons sur DE les perpendiculaires AP et BQ ; le pentagone est décomposé en un quadrilatère ABCD et en un triangle ADE. Le double de l'aire du quadrilatère s'exprime d'après la combinaison binaire des trois côtés AB, BC, CD, et l'on a :

$$2ADE = DE.OB \sin O - DE.AB \sin O ;$$

$$DE.OB \sin O = DE.BQ = 2.EBD = 2.BCDE - 2BCD ;$$

mais BCDE s'exprime en combinaison binaire des côtés BC, CD, DE; il faut donc en ôter $BC.CD \sin C'$ pour avoir l'aire EBD, et remarquant que

$$AB.DE \sin O = - AB.DE \sin (B' + C' + D'),$$

il vient donc finalement :

$$2S = AB.BC \sin B' + AB.CD \sin (B' + C') + AB.DE \sin (B' + C' + D') +$$
$$+ BC.CD \sin C' + BC.DE \sin (C' + D') + CD.DE \sin D'.$$

V. *Généralement.* Soit le polygone ABCDE... LMN de n côtés ; on mène la diagonale AM ; le polygone est décomposé en un polygone ABCDE...LM de $n-1$ côtés et en un triangle AMN. Supposons que la loi ait lieu pour un polygone de $n-1$ côtés, on a donc les combinaisons binaires des côtés AB, BC... LM, et l'aire du triangle AMN amène les combinaisons du côté MN, successivement avec AB, BC... LM.

Observation. Dans nos figures, tous les angles sont saillants ; mais il est aisé de s'assurer que la formule comprend également les angles rentrants.

VI. On voit qu'un polygone de n côtés exige $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ multiplications, mais on peut diminuer ce nombre ; soit

$n=2m$; on mène une diagonale qui partage le polygone en deux autres, chacun de $m+1$ côtés, la diagonale comprise; l'aire de chacun de ces polygone demande $\frac{m(m-1)}{1.2}$, et les deux ensemble $m(m-1)$ multiplications, nombre qui est moindre que $(2m-1)(m-1)$; si $n=2m+1$, on opère de même.

VII. *Historique*. En 1787, L. Mascheroni, parmi des additions au Cours de mathématiques de Bossut, publia un mémoire intitulé : *Méthode pour la mesure des polygones plans*. C'est dans ce mémoire que Mascheroni énonce et démontre son théorème analytiquement. Deux années après, Simon Lhuilier fit paraître sa Polygonométrie (*); il parvient au même théorème par des considérations trigonométriques (1 — 12). Enfin Mascheroni publia à Pavie, en 1793, *une collection de problèmes pour les arpenteurs, avec différentes solutions*, ouvrage qui a été traduit de l'italien en 1803 et sous ce titre par M. Carette, ancien colonel du génie, élève de l'an III (1794), première promotion de l'École polytechnique. L'ouvrage est divisé en cinq livres; le quatrième traite de la polygonométrie, et le théorème sur l'aire des polygones est énoncé à la page 771. Il est surprenant qu'une proposition d'une utilité pratique si grande, si évidente, ait été omise dans les éléments, même par Legendre, et soit restée presque ignorée. Il en est de même des autres propositions de cet ouvrage remarquable; destinées aux arpenteurs, toutes sont énoncées sans démonstration. La recherche de ces démonstrations est un excellent sujet d'exercice pour les professeurs à donner aux élèves. Le livre cinquième, consa-

(*) Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et Abrégé d'isopérimètrie elémentaire, ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures, par S. L'Huilier, aux dépens de l'auteur, à Genève, 1789, in-4., IV, 124, 2 pl.

cré aux *solides*, renferme l'énoncé de M. Finck (*V.* p. 242). Voici quelques renseignements sur l'auteur.

Mascheroni (Laurent), né à Bergame en 1750, embrassa l'état ecclésiastique et occupa une chaire de langue grecque à l'Université de Pavie. Ce n'est qu'à l'âge de vingt-sept ans qu'il prit goût pour les mathématiques et commença à les cultiver avec de rapides progrès. En 1795, il publia à Milan la *Geometrio del compasso*, qui a donné tant de célébrité à son nom; le premier exemplaire a été apporté en France par Bonaparte, alors général de l'armée d'Italie. On doit encore à M. Carette une traduction qui a paru en 1798. Mascheroni a fait aussi un travail estimé sur les voûtes, et est venu à Paris pour prendre part à l'établissement du système métrique; il est mort exténué de fatigues en 1808, à l'âge de cinquante-huit ans. L'illustre géomètre a fait pour le *compas* ce que Lambert a fait en 1774 pour la *règle*, dans les additions jointes à la seconde édition de sa Perspective. On a une traduction de la première édition, mais les additions concernant la géométrie de la règle (p. 161) n'ont pas été traduites. Nous nous en occuperons dans les *Annales*.

VIII. On sait qu'ayant un système de forces représentées en grandeur et en direction par les côtés d'un polygone et agissant dans le sens de ces côtés prolongés dans le même sens, la résultante est un couple dont l'intensité est le double de l'aire du polygone. Il serait commode de pouvoir déduire de cette considération de statique le théorème de Mascheroni.

IX. *Application*. Hexagone ABCDEF.

AB = 1284	B′ = 32°	S = 16530191 (*Polygonométrie*, de Lhuilier, p. 57 et 59)
BC = 1782	C′ = 48°	
CD = 2400	D′ = 52°	
DE = 2760	E′ = 63°	
EF = 2860		

Au moyen de l'observation VI, on peut obtenir l'aire S au moyen de six produits, dont chacun se calcule par logarithmes ; un autre calcul donne $F = 88° \ 31' \ 37'',8$ et $AF = 4621,5$.