NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème sur le tore de M. Villarceau (Yvon)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 345-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__345_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORÈME SUR LE TORE

de M. Villarceau (Yvon).

—

I. *Lemme.* 1° Soit $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2=0$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires, M un point de cette ellipse et T le point de rencontre de la tangente menée en M et de l'axe des x, β étant l'angle que forme cette tangente avec l'axe des x et p la distance du point T au centre, on a :

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{b}{\sqrt{p^2-a^2}}.$$

2° Pour l'hyperbole $a^2z^2-b^2x^2+a^2b^2=0$, on a :

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2-p^2}},\quad \text{et}\quad \operatorname{tang}\beta=\frac{a}{\sqrt{b^2+p^2}}$$

dans l'hyperbole conjuguée. 3° Pour la parabole $z^2=qx^2$:

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}};$$

p est la distance de T au sommet.

II. *Lemme.* 1° soit $a^2z^2+b^2(x-p)^2=a^2b^2$ l'équation d'une ellipse dans un plan vertical ; si cette ellipse tourne autour d'une verticale passant par l'origine et qu'on prend pour axe des z, l'équation de la surface de révolution est

$$[a^2z^2+b^2(y^2+x^2+p^2-a^2)]^2=4p^2b^4(x^2+y^2).$$

2° Pour l'hyperbole :

$$[a^2z^2 - b^2(y^2 + x^2 + p^2 - a^2)]^2 = 4p^2b^4(x^2 + y^2)$$

tournant autour de l'axe focal et

$$[b^2z^2 + a^2(x^2 + y^2 - b^2 - p^2)]^2 = 4a^4p^2(x^2 + y^2),$$

hyperbole conjuguée. 3° Pour la parabole :

$$z^2 = q(x - p), \quad (z^2 + pq)^2 = q^2(x^2 + y^2).$$

III. *Problème.* **Dans quel cas un plan diamétral coupe-t-il l'une quelconque de ces trois surfaces suivant des coniques?**

Solution. 1° *Ellipse.* On peut supposer que le plan passe par l'axe des y ; alors son équation est $z = \alpha x$, la projection de l'intersection sur le plan xy, a donc pour équation :

$$[x^2(a^2\alpha^2 + b^2) + b^2(y^2 + p^2 - a^2)]^2 = 4p^2b^4(x^2 + y^2).$$

Passant aux coordonnées polaires, il vient :

$$\rho^2(a^2\alpha^2\cos^2\varphi + b^2) + b^2(p^2 - a^2) = 2pb^2\rho,$$
$$\rho^2(a^2\alpha^2 + b^2) - 2pb^2\rho + b^2(p^2 - a^2) = a^2\alpha^2\rho^2\sin^2\varphi.$$

Pour que le premier membre devienne un carré parfait, il faut prendre $\alpha^2(p^2 - a^2) = b^2$ (1) ; donc $\alpha = \tang\beta$, et le plan diamétral est tangente à la surface. Substituant cette valeur de α et extrayant la racine carrée, il vient :

$$p\rho - p^2 + a^2 = \pm a\rho\sin\varphi;$$

et passant aux coordonnées rectangulaires

$$p^2(y^2 + x^2) = (p^2 - a^2 \pm ay)^2,$$
$$y^2(p^2 - a^2) + p^2x^2 \pm 2ay(p^2 - a^2) = (p^2 - a^2)^2. \qquad (1)$$

La projection sur le plan xy étant une ellipse, la courbe projetée est aussi une ellipse ; les centres des deux ellipses sont sur l'axe des y, et à une distance $+a$ du centre de la surface ou de l'origine ; les deux axes de l'ellipse en projection sont p et $\sqrt{p^2-a^2}$, et ceux de l'ellipse projetée sont p et $\sqrt{b^2+p^2-a^2}$. Si donc A est le point ou l'axe des y coupe la surface intérieurement, A′ le point où cet axe coupe extérieurement; désignons de même pour B et B′ les points d'intersection du côté opposé; alors l'ellipse projetée va de A en B′ et une seconde ellipse, correspondant à $-a$, va de A′ en B et les deux ellipses se coupent en un point dont l'abscisse de la projection est $\frac{p^2-a^2}{p}$ et dont la distance à l'origine est $\frac{\sqrt{(p^2-a^2)(b^2+p^2-a^2)}}{p}$.

2° *Hyperbole.* 1° *L'axe de rotation est perpendiculaire au diamètre focal.* Il suffit de changer partout $+b^2$ en $-b^2$; on retombe sur la même équation (1); mais p^2-a^2 étant négatif, cette équation est celle d'une hyperbole; 2° l'axe de rotation est parallèle au *diamètre focal*. Le plan diamétral tangent coupe suivant une ligne du quatrième degré qui ne se décompose pas en deux coniques.

3° *La parabole.* La section est évidemment une parabole, puisque alors p devient infini.

IV. *Théorème.* Le cylindre droit, de même axe que le tore et ayant pour base le cercle directeur, divise la surface du tore en deux parties, intérieure et extérieure; l'une diffère par excès et l'autre par défaut, de la surface totale, d'une surface égale à celle de la sphère qui a pour diamètre celui du cercle générateur; de même pour les volumes.

Démonstration. Ce beau théorème aussi de M. Villarceau est une conséquence du théorème de Guldin.

Note. M. Villarceau a énoncé son théorème sur le tore circulaire à la Société philomatique au mois de juillet dernier, et depuis M. Théod. Olivier a énoncé à la même Société le théorème généralisé (III).