DIEU

Concours pour l'admission à l'École normale (1848)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 342-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__342_1>

CONCOURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1848),

PAR M. DIEU,
Agrégé de l'Université, à Dijon.

Problème de statique.

Déterminer la position d'équilibre d'une tige pesante MM', de longueur l et de poids P, dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux droites fixes, dont l'une est verticale et l'autre dans une direction quelconque.

(*Fig.* 49). Soient Oz la verticale et RS l'oblique fixes; en prenant pour axe des x la direction de leur plus courte distance, les équations de RS sont

$$x = p, \quad y = bz. \tag{1}$$

Soient MM' la position d'équilibre, z l'ordonnée de M et x', y', z' les coordonnées de M', on a :

$$x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2 = l^2. \tag{2}$$

On peut faire abstraction des droits fixes, pourvu qu'on applique à la tige en M et M', des forces r et r' respectivement normales à ces droites, égales et contraires aux pressions qu'elles supportent; la première est parallèle à $\widehat{xy}$, donc sa direction est déterminée par l'angle α que sa projection sur ce plan fait avec Ox; la direction de la seconde le sera par les angles α', β', γ' qu'elle fait avec les trois axes.

On a : $$b \cos \beta' + \cos \gamma' = 0, \tag{3}$$

pour exprimer que r' est normale à RS.

La translation de r, r' et P à l'origine ne fournit qu'un couple dirigé dans le plan $\widehat{xy}$, dont le moment est

$$r'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha');$$

par conséquent on doit avoir $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\cos \beta'}{\cos \alpha'}$ pour que l'équilibre ait lieu, et r' est dirigée dans le plan OMM'; donc ce plan doit contenir aussi la direction de r, puisque celle de P y est comprise, et P doit être égale et directement opposée à la résultante de r et r'.

Soient HT et HC deux lignes représentant en grandeur et en direction les forces r et r' rapportées à leur point de concours; la diagonale HB du parallélogramme HFBC représente une force égale et contraire à P.

Cela posé, HBC rectangle en B donne :

$$r'^2 = P^2 + r^2 \quad \text{et} \quad \cos\gamma' = \frac{P}{r'};$$

et les triangles semblables HBC, HDM′ donnent :

$$r = P\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{2(z-z')}, \quad r' = P.\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}{2(z-z')}$$

donc,
$$\cos\gamma' = \frac{2(z-z')}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}};$$

et l'on a, par

$$\cos\beta' = \frac{y'}{x'}\cos\alpha' \quad \text{et} \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

$$\cos\alpha' = \frac{-x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+4(z'-z)^2}}.$$

D'après cela, l'équation (3) donne :

$$z - z' = \frac{by'}{2},$$

et (2),

$$x'^2 + \left(1 + \frac{b^2}{4}\right)y'^2 = l^2.$$

Cette dernière représente un cylindre elliptique qui coupera RS dans les positions qu'on pourra donner à M′. En y remplaçant x' par p et y' par bz' [équation (1)], il vient :

$$z' = \pm\frac{1}{b}\sqrt{\left(\frac{l^2-p^2}{1+\frac{1}{4}b^2}\right)},$$

pour les coordonnées $\hat{z}$ de ces points, et l'on a la condition que l ne soit pas inférieur à p pour que le problème soit possible, ce qui est évident *à priori* : si $l > p$, il y aura deux solutions et si $l = p$, il n'y aura pas de position d'équilibre, car alors r et r' seraient dirigées suivant la tige elle-même et ne pourront avoir une résultante égale et contraire à P.

Enfin les expressions précédentes feront connaître toutes les autres inconnues de la question.