

OSSIAN BONNET

Théorème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 331-332

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__331_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PAR M. OSSIAN BONNET.

Le théorème de M. Serret, dont j'ai donné une démonstration analytique dans le tome précédent de ce Journal, n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif à toutes les surfaces gauches du second degré, et qui s'énonce ainsi :

« Dans toute surface gauche du second degré, la somme
» des distances des différents points d'une même ligne de
» courbure à une trajectoire orthogonale quelconque des gé-
» nératrices rectilignes du premier système et à une trajec-
» toire orthogonale quelconque des génératrices rectilignes
» du second système, a constamment la même valeur. »

La démonstration de ce dernier théorème est d'ailleurs d'une extrême facilité. Soit, en effet, AmB une ligne de courbure d'un hyperboloïde ou d'un paraboloidé gauche,

CD une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du premier système, et **C₁D₁** une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du second système. Prenons sur **AmB** deux points infiniment voisins *m* et *m'*, et menons les génératrices rectilignes *mn*, *mn₁*, *m'n'*, *m'n'₁*, qui répondent à ces points, il faut prouver que

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1.$$

Or, prenons sur *n'm'* une longueur *n'p'* égale à *mn*, et sur *mn₁* une longueur *n₁p₁* égale à *m'n'₁*, puis joignons *mp'* et *m'p₁*, les deux triangles *mm'p'* et *mm'p₁* seront égaux, comme rectangles et ayant *mm'* commun et l'angle *mm'p'* égal à l'angle *m'mp₁*, puisque, d'après une propriété bien connue, la ligne de courbure fait en chaque point des angles égaux avec les génératrices rectilignes qui y passent; de là résulte :

$$m'p' = mp_1,$$

et par suite :

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1. \quad \text{C. Q. F. D}$$