NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Théorème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 331-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__331_1>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

PAR M. OSSIAN BONNET.

Le théorème de M. Serret, dont j'ai donné une démonstration analytique dans le tome précédent de ce Journal, n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif à toutes les surfaces gauches du second degré, et qui s'énonce ainsi :

« Dans toute surface gauche du second degré, la somme » des distances des différents points d'une même ligne de » courbure à une trajectoire orthogonale quelconque des gé- » nératrices rectilignes du premier système et à une trajec- » toire orthogonale quelconque des génératrices rectilignes » du second système, a constamment la même valeur. »

La démonstration de ce dernier théorème est d'ailleurs d'une extrême facilité. Soit, en effet, AmB une ligne de courbure d'un hyperboloïde ou d'un paraboloïde gauche, CD une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du premier système, et C_1D_1 une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes du second système. Prenons sur AmB deux points infiniment voisins m et m', et menons les génératrices rectilignes mn, mn_1, $m'n'$, $m'n'_1$, qui répondent à ces points, il faut prouver que

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1.$$

Or, prenons sur $n'm'$ une longueur $n'p'$ égale à mn, et sur mn_1 une longueur n_1p_1 égale à $m'n'_1$, puis joignons mp' et $m'p_1$, les deux triangles $mm'p'$ et $mm'p_1$ seront égaux, comme rectangles et ayant mm' commun et l'angle $mm'p'$ égal à l'angle $m'mp_1$, puisque, d'après une propriété bien connue, la ligne de courbure fait en chaque point des angles égaux avec les génératrices rectilignes qui y passent; de là résulte :

$$m'p' = mp_1,$$

et par suite :

$$mn + mn_1 = m'n' + m'n'_1. \qquad \text{C. Q. F. D}$$