Nouvelles annales de mathématiques

Mention

Lucien Gilles

Solution de la question 184

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 307-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__307_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 184 (t. VII, p. 239),

PAR MM. MENTION ET GILLES (LUCIEN).

On a la formule (*voir* t. VI, p. 399) :

$$a^p+b^p=(a+b)^p-\frac{p}{1}ab(a+b)^{p-2}+$$

$$+\frac{p(p-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{p-4}-\frac{p(p-5)(p-4)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{p-6}\ldots+$$

$$+(-1)^r a^r b^r \frac{p}{1}.\frac{p-2r+1}{2}.\frac{p-2r+2}{3}\ldots\frac{p-r-1}{r}(a+b)^{p-2r}.$$

$\frac{p-1}{2}$ est la valeur de r, qui correspond au dernier terme dont le coefficient sera p, et qui contiendra $(a+b)$ à la première puissance.

Actuellement soit α un facteur premier commun à $a+b$ et $\frac{a^p+b^p}{a+b}$, il devra diviser le terme indépendant de $a+b$ dans le développement de $\frac{a^p+b^p}{a+b}$, qui est :

$$\pm a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Or, α ne peut diviser ni $a^{\frac{p-1}{1}}$, ni $b^{\frac{p-1}{2}}$, puisqu'il diviserait a ou b ; et comme α divise $a+b$, il diviserait à la fois a et b, ce qui est absurde ; donc il divise p. Mais p est premier, donc $\alpha=p$.

Supposons que p^q divise a^p+b^p, on voit que, si $(a+b)$

ne contenait pas $q-1$ fois p, le dernier terme $a^{\frac{p-1}{2}}b^{\frac{p-1}{2}}p(a+b)$ ne pourrait pas contenir q fois le facteur p.

Remplaçant b par $-b$, on aura a^p-b^p, puisque p est impair, et les mêmes considérations s'appliqueront.