

MENTION

LUCIEN GILLES

Solution de la question 184

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 307-308

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__307_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 184 (t. VII, p. 239),

PAR MM. MENTION ET GILLES (LUCIEN).

On a la formule (voir t. VI, p. 399) :

$$\begin{aligned}
 a^p + b^p &= (a + b)^p - \frac{p}{1} ab(a + b)^{p-2} + \\
 &+ \frac{p(p-3)}{1.2} a^2 b^2 (a + b)^{p-4} - \frac{p(p-5)(p-4)}{1.2.3} a^3 b^3 (a + b)^{p-6} \dots + \\
 &+ (-1)^r a^r b^r \frac{p}{1} \cdot \frac{p-2r+1}{2} \cdot \frac{p-2r+2}{3} \dots \frac{p-r-1}{r} (a + b)^{p-2r}.
 \end{aligned}$$

$\frac{p-1}{2}$ est la valeur de r , qui correspond au dernier terme dont le coefficient sera p , et qui contiendra $(a + b)$ à la première puissance.

Actuellement soit α un facteur premier commun à $a + b$ et $\frac{a^p + b^p}{a + b}$, il devra diviser le terme indépendant de $a + b$

dans le développement de $\frac{a^p + b^p}{a + b}$, qui est :

$$\pm a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Or, α ne peut diviser ni $a^{\frac{p-1}{2}}$, ni $b^{\frac{p-1}{2}}$, puisqu'il diviserait a ou b ; et comme α divise $a + b$, il diviserait à la fois a et b , ce qui est absurde; donc il divise p . Mais p est premier, donc $\alpha = p$.

Supposons que p^q divise $a^p + b^p$, on voit que, si $(a + b)$

ne contenait pas $q-1$ fois p , le dernier terme $a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} p(a+b)$ ne pourrait pas contenir q fois le facteur p .

Remplaçant b par $-b$, on aura $a^p - b^p$, puisque p est impair, et les mêmes considérations s'appliqueront.