

J. MURENT

Solution de la question 189

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 298-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__298_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 189 (p. 240),

PAR M. J. MURENT,

Bachelier ès sciences, à Clermont-Ferrand.

—

Soient $t = f(x, y)$; $u = F(x, y)$; d'où $x = \varphi(u, t)$; $y = \psi(u, t)$;
on a :

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x)(\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1,$$

f'_x étant la dérivée de $f(x)$ par rapport à x , et ainsi des autres. (Möbius.)

Démonstration. D'après les relations données, x et y étant deux fonctions des variables indépendantes u et t , différencions chacune des équations $t = f(x, y)$ et $u = F(x, y)$, d'abord par rapport à t , puis par rapport à u , en suivant la règle des fonctions composées, nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} \\ 0 &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{du} \\ 0 &= \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dt} \\ 1 &= \frac{dF}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{du}; \end{aligned}$$

en remplaçant les coefficients différentiels par les dérivées et observant que les relations $x = \varphi(u, t)$, $y = \psi(u, t)$ donnent $\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'_t$, $\frac{dx}{du} = \varphi'_u$, $\frac{dy}{dt} = \psi'_t$, $\frac{dy}{du} = \psi'_u$, les quatre équations précédentes se mettront sous la forme :

$$1 = f'_x \varphi'_t + f'_y \psi'_t \quad (1)$$

$$0 = f'_x \varphi'_u + f'_y \psi'_u \quad (2)$$

$$0 = F'_x \varphi'_t + F'_y \psi'_t \quad (3)$$

$$1 = F'_x \varphi'_u + F'_y \psi'_u. \quad (4)$$

Multipliant, d'une part (1) et (4), de l'autre (2) et (3), il viendra :

$$1 = f'_x F'_x \varphi'_t \varphi'_u + f'_x F'_y \varphi'_t \psi'_u + f'_y F'_x \varphi'_u \psi'_t + f'_y F'_y \psi'_t \psi'_u$$

$$0 = f'_x F'_x \varphi'_t \varphi'_u + f'_x F'_y \varphi'_t \psi'_u + f'_y F'_x \varphi'_u \psi'_t + f'_y F'_y \psi'_t \psi'_u;$$

retranchant membre à membre ces deux dernières, et réduisant, il restera :

$$1 = f'_x F'_y (\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) - f'_y F'_x (\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t),$$

ou enfin

$$(f'_x F'_y - f'_y F'_x) (\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t) = 1. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ce théorème analytique ?