NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MURENT

Solution de la question 189

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 298-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__298_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 189 (p. 240),

PAR M. J. MURENT,
Bachelier ès sciences, à Clermont-Ferrand.

Soient $t=f(x,y)$; $u=\mathrm{F}(x,y)$; d'où $x=\varphi(u,t)$; $y=\psi(u,t)$; on a :

$$(f'_x\mathrm{F}'_y - f'_y\mathrm{F}'_x)(\varphi'_t\psi'_u - \varphi'_u\psi'_t) = 1,$$

f'_x étant la dérivée de $f(x)$ par rapport à x, et ainsi des autres. (Mobius.)

Démonstration. D'après les relations données, x et y étant deux fonctions des variables indépendantes u et t, différentions chacune des équations $t=f(x,y)$ et $u=\mathrm{F}(x,y)$, d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, en suivant la règle des fonctions composées, nous aurons ainsi :

$$1=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$
$$0=\frac{df}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{du}$$
$$0=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}$$
$$1=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{du}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{du};$$

en remplaçant les coefficients différentiels par les dérivées et observant que les relations $x=\varphi(u,t)$, $y=\psi(u,t)$ donnent $\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'_t$, $\frac{dx}{du}=\varphi'_u$, $\frac{dy}{dt}=\psi'_t$, $\frac{dy}{du}=\psi'_u$, les quatre équations précédentes se mettront sous la forme :

$$1=f'_x\varphi'_t+f'_y\psi'_t \qquad (1)$$
$$0=f'_x\varphi'_u+f'_y\psi'_u \qquad (2)$$
$$0=F'_x\varphi'_t+F'_y\psi'_t \qquad (3)$$
$$1=F'_x\varphi'_u+F'_y\psi'_u. \qquad (4)$$

Multipliant, d'une part (1) et (4), de l'autre (2) et (3), il viendra :

$$1=f'_xF'_x\varphi'_t\varphi'_u+f'_xF'_y\varphi'_t\psi'_u+f'_yF'_x\varphi'_u\psi'_t+f'_yF'_y\psi'_t\psi'_u$$
$$0=f'_xF'_x\varphi'_t\varphi'_u+f'_xF'_y\varphi'_u\psi'_t+f'_yF'_x\varphi'_t\psi'_u+f'_yF'_y\psi'_t\psi'_u;$$

retranchant membre à membre ces deux dernières, et réduisant, il restera :

$$1=f'_xF'_y(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t)-f'_yF'_x(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t),$$

ou enfin

$$(f'_xF'_y-f'_yF'_x)(\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t)=1. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ce théorème analytique ?