NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème sur le centre de gravité, d'après M. F. Heinen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 283-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__283_0>

THÉORÈME SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ,

d'après M. F. Heinen (Crelle, t. XVIII, p. 176, 1838).

—

I. *Lemme.* Soient A et B deux points matériels, a et b leurs poids, et C leur centre de gravité, P un troisième point, et soient menées les droites PA, PC, PB, on a

$$a.\overline{PA}^2 + b.\overline{PB}^2 = (a+b)\overline{PC}^2 + \frac{ab}{a+b}.\overline{AB}^2.$$

II. *Lemme.* Soient A_1, A_2... A_n; n point matériel; a_1, a_2... a_n leurs poids respectifs; S_2 le centre de gravité de A_1, A_2, et s_2 le poids; S_3 le centre de gravité de A_3, S_2, et s_3 le poids, etc., et enfin S_n le centre de gravité de S_{n-1} et A_n, et s_n le poids; de sorte que $s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$. D'un point quelconque P, menons les droites PA_1, PA_2... PA_n, PS_2, PS_3... PS_n, on aura :

$$\left.\begin{aligned} &a_1\overline{PA_1}^2 + a_2\overline{PA_2}^2 + \ldots a_n\overline{PA_n}^2 = \frac{a_2.a_1}{s_2}\overline{A_1A_2}^2 + \\ &+ \frac{a_3.s_2}{s_3}\overline{S_2A_3}^2 + \ldots \frac{a_n.s_{n-1}}{s_n}\overline{S_{n-1}A_n}^2 + s_n\overline{PS_n}^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ce lemme est une conséquence du précédent.

III. *Théorème.* Même notation que le lemme précédent.

Dans quelque ordre qu'on combine les poids successivement pour parvenir au centre de gravité s_n du système, le second membre de la précédente équation, moins le dernier terme, est une quantité constante.

Démonstration. Supposons que le point P coïncide avec le point S_n, alors PS_n devient nul et le premier membre de l'équation (1) donne la quantité constante

$$a^1\overline{S_nA_1}^2 + a_2\overline{S_nA_2}^2 + \ldots a_n\overline{S_nA_n};$$

donc, etc.

Corollaire. Faisant $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_n = 1$, il vient :

$$\overline{S_nA_1}^2 + \overline{S_nA_2}^2 + \overline{S_nA_n}^2 = \frac{1}{2}A_1A_2^2 + \frac{2}{3}S_2A_3 + \ldots \frac{n-1}{n}S_{n-1}A_n^2.$$

IV. *Théorème.* Soit $\Sigma_1^n a_p.(PA_p)^2 = E$; $\Sigma a_p.a_q.\overline{A_pA_q}^2 = Q$; p et q ont toutes les valeurs prises dans la suite 1, 2, 3... n; A_pA_q est la droite qui réunit A_p à A_q; on a ·

$$[s_n.PS_n]^2 = s_nE - Q. \qquad (2)$$

Démonstration. Plaçons le point P successivement en A_1, $A_2 \ldots A_n$, l'équation donne :

$$a_2A_1A_2^2 + \ldots a_nA_1A_n^2 = a_1S_nA_1^2 + a_2S_nA_2^2 + \ldots a_nS_nA_n + s_nA_1S_n^2,$$
$$a_1A_2A_1^2 + \ldots a_nA_2A_n^2 = a_1S_nA_2^2 + a_2S_nA_2^2 \ldots\ldots + s_2A_2S_n^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1A_nA_1^2 + \ldots a_{n-1}A_nA_{n-1}^2 = a_1S_nA_1^2 \ldots\ldots + s_nA_nS_n^2;$$

multipliant la première équation par a_1, la seconde par a_2, etc., il vient, conformément à la notation :

$$Q = s_n[E - s_n\overline{PS_n}^2];$$

d'où l'on déduit l'équation (2).

Observation. Au moyen de cette formule, on déduit les distances du centre de gravité à trois points du système, en fonction de données du système. Cette formule a été démontrée analytiquement par Lagrange, *Théorie des fonctions*, p. 362, et *Mécanique analytique*, t. I, sect. III, § 20 ; et par Laplace, *Mécanique céleste*, t. II, chap. III, § 15.