NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Discussion d'une conique donnée par une équation enveloppe ou aux ordonnées linéaires de Plücker, et applications des problèmes sur les enveloppes des cordes de coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 277-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__277_0>

DISCUSSION

d'une conique donnée par une équation enveloppe *ou aux ordonnées linéaires de Plücker* (*v.* p. 10), *et applications des problèmes sur les enveloppes des cordes de coniques.*

—

I. *Théorème.* Soit $py + qx = 1$ (1) l'équation d'une droite, et $ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eq + f = 0$ (2) la relation entre p et q, cette relation est l'équation enveloppe d'une conique.

Démonstration. Posons l'equation hexanome ordinaire d'une conique, γ étant l'angle des axes; pour que la droite (1) soit tangente à cette conique, et considérant que p et q sont les valeurs réciproques des coordonnées à l'origine, on doit avoir la relation

$$l'p^2 - 2npq + lq^2 - 2k'p - 2kq + m = 0 \quad (3) \quad (\text{t. II, p. } 108).$$

Or on peut identifier les deux équations (2) et (3), ce qui donne :

$$\frac{l}{m} = \frac{c}{f};\ \frac{l'}{m} = \frac{a}{f};\ \frac{2k'}{m} = -\frac{d}{f};\ \frac{2k}{m} = -\frac{e}{f};\ \frac{2n}{m} = \frac{b}{f} \quad (4);$$

c. q. f. d.

II. *Problème.* Étant donnée l'équation enveloppe d'une conique, trouver l'espèce.

Solution. Soit (2) l'équation enveloppe donnée de la conique, on a les relations d'identité

$$\mathrm{A} = \frac{k^2 - ml}{4\mathrm{L}};\quad \mathrm{C} = \frac{k'^2 - ml'}{4\mathrm{L}};\quad \mathrm{B} = \frac{-2(kk' + mn)}{4\mathrm{L}}.$$

Substituant, au lieu de k, k', l, l', n leurs valeurs déduites des relations (4), il vient :

$$A = \frac{m^2(e^2 - 4cf)}{16f^2L}; \quad C = \frac{m^2(d^2 - 4af)}{16f^2L}; \quad B = -\frac{m^2(de - 4bf)}{8f^2L};$$

d'où

$$B^2 - 4AC = \frac{m^4}{64f^4L^2}[(de - 4bf)^2 - (e^2 - 4cf)(d^2 - 4af)] =$$

$$= \frac{4m^4f}{64f^4L^2}[ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac)] = \frac{4m^4f}{64f^4L^2}L_1.$$

Cette expression permet de déterminer l'espèce de la conique.

1° Si $f = 0$, c'est une parabole.

2° Si $L_1 = 0$ et $b^2 - 4ac$ pas négatif, alors l'équation (2) est décomposable en facteurs rationnels, et chacun de ces facteurs a pour enveloppe un point (*v.* t. I, p. 491); si $L_1 = 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, l'équation ne représente rien. Si $d = e = f = b^2 - 4ac = 0$, alors l'équation se réduit à un facteur carré, et l'équation représente un point double.

3° Si fL_1 est positif, la conique est une hyperbole, et si fL_1 est négatif, c'est une ellipse.

Observation. Nous avons désigné la fonction par L_1, parce que sa formation est analogue à celle de la fonction L dans l'équation hexanome ordinaire.

III. Si l'on désigne par x et y les coordonnées du centre, on a :

$$x = -\frac{e}{2f}; \quad y = \frac{-d}{2f};$$

ainsi $dp + eq + 2f = 0$ est l'équation enveloppe du centre.

IV. *Problème.* Un triangle a deux sommets fixes sur une conique donnée; le troisième sommet décrit une seconde courbe donnée dans le plan de la conique; celle-ci est coupée par les côtés mobiles du triangle en deux points. Trouver l'équation enveloppe de la droite qui joint les deux points.

Solution. Désignons par $2r$ la longueur du côté du triangle inscrit dans la conique; prenons ce côté pour axe des x, et son milieu pour origine, et une droite de direction quelconique pour axe des y ; soit $F(X, Y)=0$ l'équation de la courbe donnée sur laquelle se meut le sommet mobile. Un calcul facile donne pour le système des deux côtés mobiles du triangle, l'équation suivante :

$$y^2(X^2-r^2)-2XYxy+Y^2x^2+2r^2Yy-r^2Y^2=0, \quad (1)$$

qui se vérifie d'ailleurs en faisant d'abord $x=X$ et $y=Y$, et ensuite en faisant $y=0$, $x=\pm r$, la conique qui passe par les sommets fixes a nécessairement une équation de cette forme :

$$Ay^2+Bxy+x^2+Dy-r^2=0; \quad (2)$$

A, B, D sont trois constantes.

Retranchant l'équation (1) de l'équation (2) multipliée par y^2 et ôtant du reste le facteur commun, il vient :

$$y(Ay^2-X^2+r^2)+Yx(BY+2X)+Y(DY-2r^2)=0; \quad (3)$$

le facteur ôté y correspond à l'équation $y=0$, équation du côté fixe, corde commune au triangle et à la conique ; et l'équation (3) correspond à la seconde corde commune et variable ; donnons à cette dernière équation la forme $py+$ $+qx=1$, on obtient :

$$Y(B+Dq)+2X-2qr^2=0, \quad (4)$$
$$Y^2(A+Dp)-X^2-2pr^2Y+r^2=0. \quad (5)$$

Éliminant X et Y entre ces deux équations et l'équation $F(X, Y)=0$, on obtient une relation entre p et q ; qui est l'équation enveloppe cherchée.

V. *Problème.* Mêmes données qu'au problème précédent. Trouver la courbe telle que l'enveloppe de la corde mobile soit une conique.

Solution. On a :

$$p=\frac{AY^2-X^2\pm r^2}{Y(2r^2-DY)}; \quad q=\frac{BY^2+2XY}{Y(2r^2-DY)}.$$

Pour que l'enveloppe soit celle d'une conique, on doit avoir :

$$ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eqtf = 0\,;$$

mettant à la place de p et de q leurs valeurs respectives, on parvient à une équation du 4^e degré en X et Y, à laquelle il ne manque que des termes en X^3 et en X pour être complète. Or elle ne renferme que cinq indéterminées ; elle ne saurait donc représenter une courbe quelconque de son espèce.

VI. *Théorème.* Mêmes données. Si la ligne donnée est une droite, l'enveloppe de la corde mobile est une conique.

Démonstration. Éliminant Y entre les équations (4) et (5), il vient, réductions faites :

$$\left.\begin{array}{l} X^2[4(A+Dp)-(B+Dq)^2]+ \\ +4Xr^2(Bp-2Aq-Dpq)+4qr^4[Aq-Bp]+r^4[B+Dq]^2 \end{array}\right\}=0. \quad (6)$$

L'axe des y ayant une direction quelconque, on peut supposer que cette direction est parallèle à celle de la droite donnée ; alors X est une quantité constante, et l'équation étant du second degré en p et q est l'équation enveloppe d'une conique. C. q. f. d.

Observation. Eliminant X entre les deux équations (4) et (5), il vient cette équation en Y :

$$q^2[2r^2 - DY]^2 + 4pY[2r^2 - DY] - 2BYq[2r^2 - DY] +$$
$$+ Y^2[B^2 - 4A] - 2r^2 = 0.$$

La droite donnée devenant parallèle à l'axe des x ; alors Y est constant, et cette équation devient encore une équation enveloppe d'une conique, dont l'espèce est indiquée par le signe du terme tout connu. Or l'on a :

$$a = b = 0 \quad \text{et} \quad c = (2r^2 - DY)^2 \text{ (Probl. II)}\,;$$

si $2r^2 - DY = 0$, alors la droite donnée est la polaire de l'origine, et l'équation (3) indique que la corde mobile passe constamment par l'origine ; ce qui est évident *à priori*.

VII. *Théorème.* Mêmes données. Si la ligne donnée est une seconde conique ayant avec la première la corde fixe en commun, l'enveloppe de la corde mobile est une troisième conique, ayant avec la seconde conique deux points de contact aux extrémités de la corde fixe.

Démonstration. Deux coniques ont toujours six cordes en commun, analytiques ou réelles ; il y en a toujours au moins deux dont les directions sont réelles ; or, ici, les deux coniques ayant une corde fixe réelle en commun, il en existe encore une seconde ; la première étant prise pour axe des x, donnons à l'axe des y même direction que la seconde corde ; l'équation de la première conique étant comme dessus,

$$Ay^2 + Bxy + x^2 + Dy - r^2 + 0 ,$$

celle de la seconde conique est :

$$AY^2 + B'XY + X^2 + D'Y - r^2 = 0. \qquad (7)$$

Ainsi la seconde corde a pour équation $x(B-B')+D-D'=0$; les équations (4) et (5) deviennent :

$$Y(B + Dq) + 2X = 2qr^2,$$
$$DpY - B'X = D' + 2pr^2 ;$$

d'où

$$Y = \frac{2(B'r^2q + 2r^2p + D')}{B'Dq + 2Dp + BB'} ; \qquad X = \frac{-DD'q - 2Br^2p - BD'}{B'Dq + 2Dp + BB'} .$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient une relation du second degré entre p et q ; donc la corde mobile enveloppe une conique.

Observation. Cette démonstration n'est pas applicable à deux coniques *semblables* ayant une corde en commun, parce que la seconde corde est située *à l'infini.* Toutefois les projections *centrales* de ces courbes semblables ne sont plus semblables. Le théorème subsiste donc pour les projections ; il subsiste donc aussi évidemment pour les courbes projetées.

VIII. *Théorème.* Soient deux coniques O et O′ ayant deux points de contact en A et A′ ; si l'on mène à la conique intérieure O une tangente rencontrant la conique O′ en deux points B et B′, le lieu géométrique du point d'intersection des droites AB, A′B′ est une troisième conique passant par les points A et A′.

Démonstration. C'est l'inverse du théorème VII.

IX Soient deux coniques O et O′ ayant deux tangentes communes ; menons une tangente quelconque à la conique O, rencontrant les deux tangentes fixes en deux points A et A′; par chacun de ces points on mène une tangente à la conique O′; le lieu géométrique de l'intersection de ces tangentes est une conique touchée par les deux tangentes fixes.

Demonstration. Par la théorie des polaires réciproques.

Tm.