

**Recueil de formules relatives aux fonctions  
circulaires et logarithmiques. Suite**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 7  
(1848), p. 269-271

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1848\\_1\\_7\\_\\_269\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__269_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## RECUEIL DE FORMULES

*relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques. Suite*  
(voir t. V, p. 413).

—

### *Trigonométrie sphérique.*

$$83. \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \sin \frac{1}{2} c \cos(P-A); P = \frac{1}{2}(A+B+C);$$

fournit cinq autres (\*).

$$84. \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} c \cos(P-C) \text{ fournit deux autres.}$$

$$85. \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} c \sin P \quad \text{id.}$$

$$86. \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2}(A-B).$$

$$87. \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2}(A-B).$$

---

(\*) Les formules 83, 84, 85 sont dues à M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (Crelle, t. X, p. 146), et les formules 86, 87, 88, 89, à Delambre (Connaissance des temps de 1809, p. 45, publiée en 1807).

$$88. \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C = \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A+B).$$

$$89. \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C = \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(A+B).$$

90.  $4 \sin a \sin b \sin c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$ , lorsque  $a + b + c = 2^q$ .

91.  $\pm \frac{1}{4}\pi = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \text{etc.}$  (Le signe + ou - selon que  $\cos x$  est positif ou négatif.

$$92. \cos x = \pm$$

$$\pm \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1.2} + \frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} - \frac{\cos 8x}{7.9} + \dots \right).$$

$$93. \cos^3 x = \pm \frac{8}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1.1.3} + \frac{\cos 3x}{1.3.5} - \frac{\cos 5x}{3.5.7} + \frac{\cos 7x}{5.7.9} - \dots \right).$$

$$94. \cos^3 x = \pm$$

$$\pm \frac{12}{\pi} \left( \frac{1}{3.1.1.3} + \frac{2 \cos 2x}{1.1.3.5} + \frac{2 \cos 4x}{1.3.5.7} - \frac{2 \cos 6x}{3.5.7.9} + \dots \right).$$

*Observation.* Ces quatre formules ont été données par M. Kummer, dans un mémoire extrêmement remarquable sur la manière de développer d'une infinité de manières en série les puissances de  $\sin x$  et  $\cos x$  (Crelle, t. XIV, p. 121, 1835); mais Fourier a déjà donné les formules 91 et 92 dans la Théorie de la chaleur (p. 175, 1822).

$$95. \sin(w-x) \sin(y-z) + \sin(w-y) \sin(z-x) + \sin(w-z) \sin(x-y) = 0.$$

*Observation.* En ôtant partout le mot *sinus*, on obtient une identité entre les six différences de quatre quantités,

M. Jacobi a trouvé la magnifique identité suivante pour les fonctions elliptiques :

$$\sin am(w-x) \sin am(y-z) + \sin am(w-y) \sin am(z-x) + \sin am(v-z) \sin am(x-y) + k^2 \sin am(w-x) \sin am(y-z) \sin am(w-y) \sin am(z-x) \sin am(v-z) \sin am(x-y) = 0;$$

on sait que  $am$  signifie l'amplitude ou l'angle  $\varphi$  dans l'intégrale  $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$  où  $k$  est le module (Crelle, t. XV, p. 200, 1835).

$$\begin{aligned}
 96. \quad & \sin x \sin y + \sin z \sin(z+x+y) = \sin(z+x) \sin(z+y). \\
 & \sin am(x) \sin am(y) + \sin am(z) \sin am(z+x+y) - \\
 & \quad - \sin am(z+x) \sin am(z+y) = \\
 = & k^2 \sin am(x) \sin am(y) \sin am(z) \sin am(z+x) \sin am(z+y) \sin am(z+x+y).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 97. \quad & \text{Tang } x \text{ tang } y + \text{tang } z \text{ tang } y(z+x+y) - \\
 & \quad - \text{tang}(z+x) \text{ tang}(z+y) = \\
 = & \text{tang } x \text{ tang } y \text{ tang } z \text{ tang}(z+x) \text{ tang}(z+y) \text{ tang}(z+x+y).
 \end{aligned}$$


---