Recueil de formules relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques. Suite

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 269-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__269_1>

RECUEIL DE FORMULES

relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques. Suite

(*voir* t. V, p. 413).

—

Trigonométrie sphérique.

83. $\text{Sin}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\sin\frac{1}{2}c\cos(P-A)$; $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$; fournit cinq autres (*).

84. $\text{Cos}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\cos(P-C)$ fournit deux autres.

85. $\text{Sin}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\sin P$ id.

86. $\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)$.

87. $\text{Sin}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C=\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B)$.

(*) Les formules 83, 84, 85 sont dues à M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (Crelle, t. X, p. 146), et les formules 86, 87, 88, 89, à Delambre (Connaissance des temps de 1809, p. 45, publiée en 1807).

88. $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}=\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

89. $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}=\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

90. $4\sin a\sin b\sin c=\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c$, lorsque $a+b+c=2^q$.

91. $\pm\frac{1}{4}\pi=\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+$ etc. (Le signe $+$ ou $-$ selon que $\cos x$ est positif ou négatif.

92. $\operatorname{Cos}x=\pm$

$$\pm\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{\cos 2x}{1.3}-\frac{\cos 4x}{3.5}+\frac{\cos 6x}{5.7}-\frac{\cos 8x}{7.9}+\ldots\right).$$

93. $\operatorname{Cos}^2 x=\pm\frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1.1.3}+\frac{\cos 3x}{1.3.5}-\frac{\cos 5x}{3.5.7}+\frac{\cos 7x}{5.7.9}-\ldots\right)$.

94. $\operatorname{Cos}^3 x=\pm$

$$\pm\frac{12}{\pi}\left(\frac{1}{3.1.1.3}+\frac{2\cos 2x}{1.1.3.5}+\frac{2\cos 4x}{1.3.5.7}-\frac{2\cos 6x}{3.5.7.9}+\ldots\right).$$

Observation. Ces quatre formules ont été données par M. Kummer, dans un mémoire extrêmement remarquable sur la manière de développer d'une infinité de manières en série les puissances de $\sin x$ et $\cos x$ (Crelle, t. XIV, p. 121, 1835); mais Fourier a déjà donné les formules 91 et 92 dans la Théorie de la chaleur (p. 175, 1822).

95. $\operatorname{Sin}(w-x)\sin(y-z)+\sin(w-y)\sin(z-x)+$
$+\sin(w-z)\sin(x-y)=0$.

Observation. En ôtant partout le mot *sinus*, on obtient une identité entre les six différences de quatre quantités.

M. Jacobi a trouvé la magnifique identité suivante pour les fonctions elliptiques :

$$\sin am(w-x)\sin am(y-z)+\sin am(w-y)\sin am(z-x)+$$
$$+\sin am(v-z)\sin am(x-y)+k^2\sin am(w-x)\sin am(y-z)$$
$$\sin am(w-y)\sin am(z-x)\sin am(v-z)\sin am(x-y)=0\,;$$

on sait que *am* signifie l'amplitude ou l'angle φ dans l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ où k est le module (Crelle, t. XV, p. 200, 1835).

96. $\sin x \sin y + \sin z \sin(z+x+y) = \sin(z+x)\sin(z+y)$.

$$\sin am(x) \sin am(y) + \sin am(z) \sin am(z+x+y) -$$
$$- \sin am(z+x) \sin am(z+y) =$$
$$= k^2 \sin am(x) \sin am(y) \sin am(z) \sin am(z+x) \sin am(z+y) \sin am(+x+y).$$

97. $\operatorname{Tang} x \operatorname{tang} y + \operatorname{tang} z \operatorname{tang} y (z+x+y) -$
$$- \operatorname{tang}(z+x) \operatorname{tang}(z+y) =$$
$$= \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y \operatorname{tang} z \operatorname{tang}(z+x) \operatorname{tang}(z+y) \operatorname{tang}(z+x+y).$$