NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Note sur l’hyperbole équilatère circonscrite à un triangle et sur la parabole inscrite à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 252-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__252_1>

NOTE

sur l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle et sur la parabole inscrite à un triangle,

PAR M. MENTION.

Théorème I. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe. Ce théorème résulte du suivant :

« Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit dans une » hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole » (voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 43) ; et inversement, si » ce cercle passe par le centre de l'hyperbole, que deux des » sommets du triangle soient situés sur la courbe, le troisième » y sera aussi. »

Théorème II. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est situé sur la directrice de cette courbe. Si l'un des côtés du triangle est la tangente au sommet, la proposition se démontre aisément ; elle sert de lemme pour la proposition générale.

Les côtés du triangle forment en effet, avec la tangente au sommet, un quadrilatère auquel on applique le théorème suivant :

« Quatre droites situées dans un même plan forment quatre » triangles, dans chacun de ces triangles existe un point de » rencontre des hauteurs ; les quatre points de rencontre sont » sur une même droite. »

Il n'y a donc qu'à démontrer le théorème lorsque l'un des côtés du triangle circonscrit est la tangente au sommet (*fig.* 45). Évidemment le point de rencontre se trouve sur une perpendiculaire à la directrice. Soient MAB le triangle circonscrit, et I le point où la hauteur perpendiculaire à la directrice rencontre cette dernière ; prouvons que AI est perpendiculaire à MB ou parallèle à FB ; F est le foyer de la parabole. A′, B′ étant les points où FA, FB rencontrent la directrice, MA′ = MB′ = MF ; ainsi I est le milieu de A′B′ ; dès lors AI, joignant les milieux A et I de deux côtés FA′, A′B′ d'un triangle, est parallèle au troisième côté FBB′....

c. q. f. d.

Note. Démonstrations analytiques :

Théorème I. Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle se coupent au point de rencontre des hauteurs du triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons le sommet A pour origine, la direction AB pour axe des $+x$, les coordonnées rectangulaires, et faisons $AB=E$; deux hyperboles équilatères passant par les points A et B, auront pour équations :

$$y^2+Bxy-x^2+Dy+Ex=0\,;\; y^2+B'xy-x^2+D'y+Ex=0\,;$$

donc les deux autres points d'intersection sont situés sur la droite $x(B-B')+D-D'=0$, c'est-à-dire sur une droite perpendiculaire à AB; mais C est un point d'intersection, donc le second point est sur la hauteur du triangle passant par C; de même sur la hauteur passant par A, etc. c. q. f. d.

Théorème II. Les directrices de toutes les paraboles inscrites à un triangle passent par le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

Démonstration. Soit ABC le triangle, prenons A pour origine, AB pour axe des $+x$, BC pour axe des $+y$, l'équation de la parabole peut être mise sous la forme :

$$p^2y^2-2pqxy+q^2x^2-2py-2qx+1=0; \qquad (1)$$

l'équation de la directrice est :

$$y(q+p\cos\gamma)+x(p+q\cos\gamma)+\cos\gamma=0. \qquad (2)$$

(t. II, p. 433.)

Soit $dy+ex+f=0$ l'équation de la droite BC, la condition de tangence donne :

$$dfq+efp-de=0, \qquad (3)$$

éliminant q entre (2) et (3), on a :

$$pf[y(d\cos\gamma-e)+x(d-e\cos\gamma)]+d[ey+ex\cos\gamma+f\cos\gamma]=0;$$

or, cette droite passe constamment par le point d'intersection des deux droites :

$$y(d\cos\gamma-e)+x(d-e\cos\gamma)=0,\; ey+ex\cos\gamma+f\cos\gamma=0.$$

La première est l'équation de la hauteur du triangle passant par l'origine A, et la seconde est l'équation de la hauteur passant par B ; donc, etc. Tm.