

MENTION

Théorème sur l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 251-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__251_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉOREME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

Si une droite touche aux points P, R respectivement, deux hyperboles équilatères qui ont le même centre O et qui se coupent en Q, les trois distances OP, OQ, OR formeront une proportion continue. (Strebor.)

PAR M. MENTION.

—

Je prends le rayon central OQ commun pour axe des x , une perpendiculaire à ce rayon mené par le centre pour axe des y .

Si d est la longueur de ce rayon central, les équations des deux hyperboles sont :

$$y^2 + Bxy - x^2 + d^2 = 0, \quad y'^2 + B'xy' - x'^2 + d^2 = 0.$$

Il faut faire voir que $d^2 = \text{OP} \cdot \text{OR}$.

Soit $y + rx + s = 0$ l'équation de la tangente, et x', y', x'', y'' les coordonnées des points P et R, on a :

$$x' = \frac{s(B-2r)}{2(r^2 - Br - 1)}; \quad y' = \frac{s(Br+2)}{2(r^2 - Br - 1)} \quad (\text{t. II, p. 108}),$$

d'où
$$\overline{\text{OP}}^2 = \frac{s^2[r^2+1][B^2+4]}{4[r^2 - Br - 1]^2}.$$

La condition de tangence donne :

$$s^2(B^2+4) = 4d^2(r^2 - Br - 1) \quad (1)$$

(t. II, p. 108,)

de là
$$\overline{\text{OP}}^2 = \frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B^2+4)} \quad \text{et} \quad \overline{\text{OR}}^2 = \frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B'^2+4)};$$

or B et B' sont racines de la même équation (1).

La théorie des fonctions symétriques donne :

$$(B^2+4)(B'^2+4) = \frac{16d^4}{s^4}(r^2+1)^2; \quad \overline{\text{OP}}^2 \cdot \overline{\text{OR}}^2 = d^4 \quad \text{et} \quad \text{OP} \cdot \text{OR} = d^2.$$

Observation. Ce calcul est une vérification utile et provisoire.