MENTION

Théorème sur l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 251-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__251_1>

THÉORÈME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

Si une droite touche aux points P, R respectivement, deux hyperboles équilatères qui ont le même centre O et qui se coupent en Q, les trois distances OP, OQ, OR formeront une proportion continue. (Strebor.)

PAR M. MENTION.

Je prends le rayon central OQ commun pour axe des x, une perpendiculaire à ce rayon mené par le centre pour axe des y.

Si d est la longueur de ce rayon central, les équations des deux hyperboles sont :

$$y^2+Bxy-x^2+d^2=0,\quad y^2+B'xy-x^2+d^2=0.$$

Il faut faire voir que $d^2=OP.OR$.

Soit $y+rx+s=0$ l'équation de la tangente, et x', y', x'', y'' les coordonnées des points P et R, on a :

$$x'=\frac{s(B-2r)}{2(r^2-Br-1)};\ y'=\frac{s(Br+2)}{2(r^2-Br-1)}\ \text{(t. II, p. 108),}$$

d'où $$\overline{OP}^2=\frac{s^2[r^2+1]\,[B^2+4]}{4[r^2-Br-1]^2}.$$

La condition de tangence donne :

$$s^2(B^2+4)=4d^2(r^2-Br-1) \qquad (1)$$

(t. II, p. 108,)

de là $$\overline{OP}^2=\frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B^2+4)}\ \text{et}\ \overline{OR}^2=\frac{4d^4(r^2+1)}{s^2(B'^2+4)};$$

or B et B' sont racines de la même équation (1).

La théorie des fonctions symétriques donne :

$$(B^2+4)(B'^2+4)=\frac{16d^4}{s^4}(r^2+1)^2;\ \overline{OP}^2.\overline{OR}^2=d^4\ \text{et}\ OP.OR=d^2.$$

Observation. Ce calcul est une vérification utile et provisoire.