NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINCK

# Cubature de quelques corps

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 7 (1848), p. 241-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__241_0>

# CUBATURE DE QUELQUES CORPS,

PAR M. FINCK,
Professeur à la Faculté des sciences de Strasbourg.

J'ai donné dans ma *Géométrie*, 3e édit., p. 458, la mesure de l'obélisque, polyèdre qui a pour bases deux polygones ayant les côtés respectivement parallèles et pour faces latérales des trapèzes. La règle établie pour cette mesure convient à une certaine classe de corps; c'est ce que je vais montrer, tout en donnant pour le cas fondamental une démonstration plus simple que celle qui est insérée dans l'ouvrage cité.

I. *Théorème.* « Si un corps a deux bases planes parallèles » et qu'il se trouve terminé latéralement par une surface » réglée, dont deux directrices sont les contours de ces bases, » ou par une surface du second degré, ce corps a pour » mesure le sixième de sa hauteur, multipliée par la somme » des aires des bases et du quadruple de la section faite à » égales distances des bases. »

Le cas le plus simple est celui de la pyramide, qui rentre dans cette règle, si l'on regarde le sommet comme une base nulle; car $h$ étant la hauteur, $b$ la base, la section moyenne est $\frac{1}{4}b$; or le volume est $\frac{1}{3}bh = \frac{1}{6}h\left[b + 4\frac{1}{4}b\right]$, ce qui est l'énoncé.

Pour second cas je prendrai le tétraèdre, en considérant deux arêtes opposées comme des bases à aires nulles. Soit ABCD (*fig.* 35) un tétraèdre, AB, CD deux arêtes opposées, EFGH une section parallèle à ces arêtes et également distante de chacune; EF sera $=\frac{1}{2}$CD, et GE$=\frac{1}{2}$AB, de sorte que si on construit le prisme ABCDKI, l'aire GF $=\frac{1}{4}$ID; or le prisme a pour mesure ID $\times$ la moitié de la distance de AB au plan ID, distance que je nomme $h$; le tétraèdre, qui est le tiers du prisme, a donc pour mesure ID $\times \frac{1}{6}h$ ou 4GF $\times \frac{1}{6}h$, ce qu'il fallait prouver.

Cela posé, tout polyèdre qui remplit les conditions exigées par l'énoncé se décomposera en tétraèdres rentrant dans les deux cas précédents. Soit, par exemple (*fig.* 36 et 36 *bis*), le polyèdre AFD, dont l'une des bases est un pentagone, l'autre un triangle; FG étant supposé parallèle à AB, la face AG est un trapèze, les autres sont des triangles; ce polyèdre se décompose en plusieurs parties, savoir: 1° HEBCD pyramide; 2° le tétraèdre BHGF; 3° le tétraèdre FAEB qui, de même que les deux premières parties, rentre dans le premier cas; 4° le tétraèdre FHBE, qui rentre dans le second cas.

II. (*Fig.* 37.) Si la surface latérale, au lieu d'être polyédrale, est courbe, mais réglée; soient AE, BF deux génératrices infiniment voisines, ABC, DEF des parties des contours des bases; tirez BE, et remplacez la portion de surface courbe ABFE par les deux triangles rectilignes ABE, BEF; en opérant de même sur toute la surface latérale, on ne changera qu'infiniment peu le volume du corps, ainsi que les aires des bases et sections; or il rentre dans l'énoncé, donc de même le corps donné.

III. (*Fig.* 38.) Soit maintenant l'anneau décrit par un segment circulaire ABC, tournant autour d'un diamètre extérieur DE; les bases sont nulles; si G est le milieu de AC, que l'on mène de A, G, C des perpendiculaires sur DE, la section moyenne est l'aire décrite par BG autour de DE; or l'anneau a pour mesure : $\frac{1}{6}HI \times AC^2\pi$,

et $AC^2 = 4AG \times GC = 4BG \times GK = 4(BL - GL)(BL + GL)$,

donc :

$$\text{anneau} = \frac{1}{6}HI \times 4\pi(\overline{BL}^2 - \overline{GL}^2) = \frac{1}{6}HI \times 4 \text{ aire } BG;$$

que, si à cet anneau on ajoute le tronc de cône décrit par ACIH autour de HI, lequel, selon ce qui précède, a pour mesure :

$$\frac{1}{6}HI \times (\text{aire } AH + \text{aire } CI + 4 \text{ aire } GL),$$

on aura le segment de sphère mesuré d'après l'énoncé.

IV. Je passe au segment d'ellipsoïde de révolution, et pour cela il suffit, dans la sphère précédente, de réduire dans un même rapport toutes les demi-cordes AH, BL, CI, perpendiculaires à DE; les aires décrites par ces cordes seront toutes altérées, dans un même rapport, égal au carré du précédent; il en est donc de même d'une tranche infiniment mince comprise entre deux plans perpendiculaires à DE, et par suite il en est de même du segment de sphère AHIC, dont le volume, ainsi que les aires des cercles AH, BL, CI, devront être multipliés par un même nombre pour passer à l'ellipsoïde.

De l'ellipsoïde de révolution on passera d'une manière analogue (*métamorphique*) à l'ellipsoïde à axes inégaux; ainsi, conservant pour section principale une section méridienne, on multipliera par un même nombre les perpendiculaires menées de tous les points de la surface de l'ellipsoïde sur ce plan; les sections perpendiculaires à l'axe de révolution seront multipliées par le même rapport, ainsi que le volume du segment.

(*Fig.* 39.) Une seconde transformation ou *déformation* conduira au cas où les bases du segment ne sont pas perpendiculaires à un axe principal. En effet, soit EF une droite quelconque menée par le centre de la surface, GH l'axe principal auquel les bases sont perpendiculaires ; prenez chaque section comprise entre AB, CD et déterminée par un plan parallèle à ceux-là, et faites-la glisser dans son plan, sans changer la direction de ses axes, jusqu'à ce que son centre soit arrivé sur EF ; le volume du segment n'aura pas changé, etc.

Le paraboloïde elliptique pouvant être considéré comme un ellipsoïde, le théorème s'applique à tout segment compris entre deux sections elliptiques parallèles.

(*Fig.* 40.) Reste l'hyperboloïde à deux nappes. Or soient ABC, DEF deux sections elliptiques parallèles faites dans une même nappe ; GHI, KLM les sections correspondantes du cône asymptote, OQ le diamètre conjugué à ces sections ; les quatre sections sont semblables, et par suite proportionnelles aux carrés des dimensions homologues PC, PI ; QF, QM ; or, à cause des asymptotes, les différences $PI^2 - PC^2$, $QM^2 - QF^2$ sont constantes pour toutes les sections parallèles ; donc le corps compris entre le segment d'hyperboloïde et le tronc de cône GHIMLK donne, parallèlement au plan KLM, des sections de même aire, et se mesure comme un cylindre ; par suite, il rentre dans le théorème ; mais le tronc de cône y rentre aussi ; donc le segment d'hyperboloïde également.

Il est évident que le théorème s'applique à une infinité d'autres corps, car deux corps compris entre deux plans parallèles ont même volume si tout plan parallèle à ceux-là et compris entre eux, détermine dans les deux corps des sections de même aire. Tout cela est renfermé dans un théorème de M. Sarrus, dont voici l'énoncé :

*Si dans un corps toute section parallèle à un plan donné a* *son aire exprimée par* A + Bz + Cz², *où z est la distance de la section au plan ;* A , B , C *sont des constantes ; un segment quelconque renfermé entre deux plans parallèles au même plan, se mesure comme il a été dit plus haut.*

Un peu de calcul intégral suffit pour la démonstration.

Du reste, on fera remarquer que si dans un pareil corps on transforme chaque section en un cercle équivalent, et qu'on fasse glisser ces cercles dans leurs plans jusqu'à ce que les centres se trouvent sur une droite quelconque perpendiculaire à ces plans, le lieu des circonférences sera une surface du second degré ; car si cette droite est l'axe des $z$, et qu'on appelle $r$ le rayon d'un des cercles, on aura :

$$\pi r^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2 ;$$

soit $x$, $y$, $z$ un point pris sur la circonférence du cercle, il vient :

$$r^2 = x^2 + y^2 ;$$

donc

$$\pi(x^2 + y^2) = \mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2 ,$$

surface du second degré de révolution autour de l'axe des $z$.

*Note.* M. C. Koppe, de Soest (Westphalie), est auteur de ce théorème. Un corps ayant pour bases deux polygones parallèles et pour faces des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour hauteur la distance des deux polygones et pour base l'aire de la section parallèle faite à égales distances des deux bases et augmentée de la *douzième* partie de l'aire d'un polygone équiangle aux bases et qui a pour côtés les différences de leurs côtés homologues. (Crelle, t. XVIII, p. 275, 1838.)

Il faudrait démontrer l'identité de cette expression avec celle de M. Finck.

On trouve dans le Lilavati (chapitre VIII, § 221) cette évaluation du volume d'une pyramide tronquée à bases rectangles ; $a$, $b$ et $a_1$, $b_1$ étant les dimensions des deux bases, le volume est égal à $\frac{1}{6}h[ab+a'b'+(a+a')(b+b')]$, énoncé entièrement conforme au théorème de M. Finck ; celui de M. Kopp est $h\left[\frac{(a+a')(b+b')}{4}+\frac{1}{12}(a'-a)(b'-b)\right]$ ; l'énoncé ordinaire est $\frac{1}{3}h[ab+a'b'+\sqrt{aba'b'}]$, et les trois sont identiques.