Formules de Delambre et analogies de Néper, déduites immédiatement des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, d'après M. Crelle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 232-233

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__232_2>

FORMULES DE DELAMBRE

et analogies de Néper, déduites immédiatement des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, d'après M. Crelle. (Crelle, XII, 348, 1834, en français.)

—

1. $$\left.\begin{aligned} &\cos B\cos C = \cos a\sin B\sin C - \cos A \quad (1)\\ &\cos b\cos c = \cos a - \cos A\sin b\sin c \quad (2)\\ &\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (3)\end{aligned}\right\}\ \text{Équations fondamentales.}$$

L'équation (3) donne :

$$\sin B\sin C(1+\cos a)(1-\cos a) = \sin b\sin c(1+\cos A)(1-\cos A)\ldots\ (4)$$

de là, on déduit :

$$[1-\cos A+\sin B\sin C(1+\cos a)](1-\cos a)=$$
$$=[1-\cos a+\sin b\sin c(1+\cos A)](1-\cos A),$$

ou bien, en vertu de l'équation (1),

$$[1+\cos(B-C)](1-\cos a)=[1-\cos(b+c)](1-\cos a)$$

$$4\cos^2\frac{1}{2}(B-C)\sin^2\frac{1}{2}a=4\sin^2\frac{1}{2}(b+c)\sin^2\frac{1}{2}A$$

$$\pm\cos\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}a=\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A. \qquad (5)$$

C'est la première équation de Delambre.

L'équation (4) donne encore

$$[1+\cos A+\sin B\sin C(1-\cos a)](1+\cos a)=$$
$$=[1+\cos a+\sin b\sin c(1-\cos A)](1+\cos A);$$

on en déduit, combinée avec l'équation (1),

$$\pm\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A, \qquad (6)$$

seconde équation de Delambre, et les deux autres sont

$$\pm\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}a=\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A \qquad (7)$$

$$\pm\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}a=\cos\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A. \qquad (8)$$

(7) et (8) se déduisent de

$$[1+\cos A-\sin B\sin C(1+\cos a)](1-\cos a)=$$
$$=[1-\cos a-\sin b\sin c(1-\cos A)](1+\cos A)$$
$$[1-\cos A-\sin B\sin C(1-\cos a)](1+\cos a)=$$
$$=[1+\cos a-\sin b\sin c(1+\cos A)](1-\cos A).$$

En divisant (7) par (5), (5) par (8), (7) par (8) et (6) par (8), on obtient les analogies de Néper.

Observation. Les formules 5, 6, 7, 8 portent le nom de Gauss en Allemagne, mais elles ont été données par Delambre, dans la *Connaissance des temps*, 1809, publiée en 1807.