NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DELADÉRÉERE

Théorème de statique de Minding sur le plan central et l'axe central

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 222-225

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__222_1>

THÉORÈME DE STATIQUE DE MINDING

sur le plan central et l'axe central. (V. p. 183.)

PAR M. DELADERRERE,
Professeur.

Lemme. Étant donné un système de forces parallèles P, P' appliquées en différents points invariablement liés entre eux, on les décompose chacune en trois autres X, X',... Y, Y',... Z, Z',... parallèles à trois directions fixes, en conservant les mêmes points d'application A, A',... et l'on obtient ainsi trois nouveaux systèmes de forces parallèles, ayant chacun même centre de forces parallèles que le système proposé ; car si l'on considère, par exemple, le système des forces X, X',... on voit que les forces X, X'... qui le composent sont proportionnelles aux forces P, P',... puisque d'après la construction employée pour effectuer la décomposition, les triangles PAX, P'A'X' sont semblables; et l'on sait que lorsque des forces parallèles tournent autour de leur point d'application en restant parallèles et conservent des valeurs proportionnelles à leurs valeurs primitives, le centre du système ne change pas.

Théorème I. Un système de forces P, P'... quelconques appliquées en différents points A, A',... liés entre eux d'une manière invariable, étant donné, on décompose chaque force en son point d'application en trois autres forces respectivement parallèles à trois directions fixes, ce qui donne trois systèmes X, X'.... Y, Y',... Z, Z'... de forces parallèles, ayant chacun un centre de forces parallèles; quelles que soient les directions, les trois centres G, G', G'' sont dans un plan invariable, auquel on donne le nom de *plan central.*

Démonstration. Effectuons une première décomposition du système, et menons le plan des trois centres G, G', G''.

Remarquons ensuite que pour effectuer, suivant d'autres axes, une deuxième décomposition des forces, il suffit pour chaque force P de décomposer ses trois composantes X, Y, Z, chacune selon les trois nouvelles directions, ce qui donnera neuf systèmes de forces parallèles. Soient A_1, A_2, A_3 les composantes de X; B_1, B_2, B_3 celles de Y; C_1, C_2, C_3 celles de Z; A'_1, A'_2, A'_3 celles de X', et ainsi de suite; les systèmes A_1, B_1, C_1 auront même centre G que le système X d'après le lemme; de même les systèmes A_2, B_2, C_2 auront même centre G' que le système Y, et enfin les systèmes A_3, B_3, C_3 auront même centre G'' que le système Z; donc les centres de tous les systèmes seront dans le plan G G' G''. Mais puisque les centres des trois systèmes A_1, B_1, C_1, qui sont parallèles, sont dans le plan G G' G'', il en sera de même du centre G_1 du système composé de ces trois systèmes, lequel est le centre du système X_1. D'après les principes connus sur la composition et décomposition des forces, on prouverait de la même manière que les centres G'_1, G''_1 des systèmes Y_1 et Z_1 sont dans le plan $G G' G''$; donc, etc.

Théorème II. On fait la décomposition indiquée (théorème I) de façon que l'une des forces soit perpendiculaire au plan central, et que les deux autres X et Y lui soient parallèles; de quelque manière que se fasse la décomposition, les centres G, G' des systèmes X, Y sont toujours sur une même ligne droite, située dans le plan central et appelée *ligne centrale.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on pourra effectuer la décomposition des forces P en X, Y, Z, en les décomposant d'abord chacune en deux forces, dont l'une, qui sera invariable dans tous les systèmes de décomposition, sera Z, et l'autre Q sera dirigée selon l'intersection du plan ZAQ avec un plan mené par le point A, parallèlement au plan central, puis en décomposant chaque force Q en deux autres X, Y, parallèles au plan central.

Maintenant les systèmes X et Y auront leurs centres G et G' dans le plan central; menons la droite G G'; pour effectuer une nouvelle décomposition des forces Q... selon deux nouvelles directions, il suffit de décomposer leurs composantes X et Y selon les deux nouvelles directions, on aura ainsi quatre systèmes de forces parallèles qui seront parallèles deux à deux, et par un raisonnement en tout semblable à celui dont on a fait usage ci-dessus, on prouvera que les centres des deux nouveaux systèmes sont sur la droite G G'.

Remarque. Ce théorème est vrai quand même la composante non parallèle au plan central ne lui est pas perpendiculaire; il suffit qu'elle soit parallèle à une direction fixe, seulement on n'a plus la ligne centrale pour la ligne contenant les centres.

Observations. Si les trois centres conjugués G, G', G'' sont sur une même droite, ils restent toujours sur cette droite quels que soient les axes, et la position du plan central est indéterminée.

Si les trois centres se confondent en un point, la coïncidence en ce point aura lieu pour tous les axes.

Dans tout ce qui précède, on suppose que le système n'est pas en équilibre et ne se réduit pas à un couple.