NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON DE CHAMP

Question IV (bis). Quel est le plus grand angle que l'on puisse inscrire dans un segment donné d'une courbe du second degré ?

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 220-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__220_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTION IV (*bis*).

Quel est le plus grand angle que l'on puisse inscrire dans un segment donné d'une courbe du second degré? (T. I, p. 123.)

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

Solution. Sur la corde AB (*) du segment décrivons une circonférence qui touche la courbe en M, il est visible que l'angle AMB est l'angle cherché. Car tous les angles inscrits dans chacun des segments de cercle séparés par cette corde sont égaux entre eux, et tout angle ayant son sommet intérieurement ou extérieurement est plus grand ou moindre. D'ailleurs tous les points du segment de courbe donné sont à la fois intérieurs ou extérieurs au segment correspondant de la circonférence tangente, attendu que le nombre des points communs aux deux courbes ne peut excéder quatre, y compris A et B. Or quand un arc de cercle tangent à une conique passe de l'intérieur à l'extérieur de celle-ci, il y a osculation, ce qui équivaut à trois points communs; donc l'osculation ne peut exister qu'en A ou en B; donc, ce cas excepté, l'angle AMB est *maximum* ou *minimum*.

Construction. Pour déterminer le point M, je rappellerai que *les diverses cordes d'intersection d'une conique avec les circonférences qui la touchent en un même point sont parallèles entre elles* (**); de plus, on aperçoit sans peine que la direction de la tangente commune et celle des cordes d'intersection

(*) Le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure.

(**) Voir la démonstration de cette propriété, t. II, p. 75 et suiv.

sont symétriques l'une de l'autre relativement aux axes principaux. Donc, *si des points de la courbe donnée où la tangente est parallèle à* AB, *on abaisse des perpendiculaires sur ces axes et qu'on les prolonge d'une longueur égale à elles-mêmes, les points ainsi obtenus seront les sommets des angles maximum ou minimum.*

Discussion. Les sommets ainsi déterminés seront donc les mêmes pour tous les segments formés par des cordes parallèles entre elles, il n'y a plus qu'à distinguer les cas de maximum et de minimum.

Parabole. Il n'y a évidemment qu'un seul sommet d'angle maximum ou minimum. Quand ce sommet tombe dans le segment donné, l'arc de courbe est renfermé tout entier dans le segment correspondant du cercle tangent; l'angle obtenu est donc un *minimum*. Il est au contraire un *maximum* quand ce sommet tombe hors du segment donné, car les branches de la parabole sont nécessairement extérieurs au cercle tangent.

Hyperbole. Les sommets obtenus sont toujours sur des branches différentes.

Pour la branche à laquelle appartient le segment, même conclusion que pour la parabole. Pour l'autre branche, l'angle obtenu est toujours un *maximum.*

A peine est-il besoin de faire observer que la construction ci-dessus est impossible, si les extrémités de la corde qui ferme le segment ne sont pas toutes deux sur la même branche.

Ellipse. Considérons d'abord le cas où le segment donné est une demi-ellipse terminée à un diamètre quelconque. Si le sommet que l'on considère tombe dans celui des angles formés par des diamètres conjugués égaux qui renferme le petit axe, l'angle est un *maximum;* c'est ce qu'on vérifie sans difficulté.

Si le sommet tombe dans l'angle des diamètres conjugués égaux qui renferme le grand axe, l'angle est un *minimum*.

Considérons présentement les cordes parallèles au diamètre choisi; les conclusions ci-dessus subsisteront encore pour toutes les cordes comprises entre les deux sommets. Et si l'on suppose qu'une corde se meuve parallèlement à elle-même et que l'un des sommets passe d'un côté à l'autre de cette corde, l'angle correspondant de *maximum* deviendra *minimum*, et réciproquement.

Remarque. Il suit de là que dans le cas où un segment d'ellipse renferme à la fois deux sommets, l'un donne un angle *maximum* et le second un angle *minimum*, ce qui s'accorde avec ce principe général que dans toute fonction continue le *maximum* et le *minimum* se succèdent alternativement.