NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Théorèmes nouveaux sur le quadrilatère et le pentagone inscrits à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 214-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__214_1>

THÉORÈMES NOUVEAUX.

Sur le quadrilatère et le pentagone inscrits à une conique.

PAR M. PAUL SERRET.

Théorème I. Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique. Avec ses quatre sommets pris trois à trois, on peut former quatre triangles. Soit ABC l'un de ces triangles ; du sommet restant D menons trois droites conjuguées aux trois côtés du triangle ; elles les rencontrent en trois points M, N, P situés sur une même droite L. Faisant la même construction pour chacun des trois autres systèmes formés d'un triangle et d'un point, nous aurons en tout quatre droites telles que L, or ces quatre droites se coupent au même point P.

Théorème II. Soit ABCDE un pentagone inscrit à une conique; avec les cinq sommets pris quatre à quatre, on peut former cinq quadrilatères inscrits; dans chacun d'eux on construit le point P du théorème précédent, ce qui donne cinq points P; ces cinq points P sont situés sur une même conique semblable à la première et semblablement placée, le rapport de similitude de la 1re à la 2^{e} étant celui de 2 à 1.

Démonstration du Théorème I.

I. Lemme I. — *Théorème.* Pour abréger le discours, nous appellerons *point de rencontre*, dans un triangle inscrit à une conique, le point commun d'intersection des trois droites qui, partant des sommets, sont conjuguées respectivement aux côtés opposés. — Soit ABC un triangle inscrit à une conique, O un point quelconque de la conique, et H le *point de rencontre* (par rapport à la conique); par O menons aux trois côtés du triangle, des droites conjuguées les rencontrant en trois points situés sur une droite L; joignons OH; la droite L passera toujours par le milieu de OH.

Démonstration. La marche que je vais suivre permettra de démontrer à la fois, par un même calcul, et le lemme actuel, et le théorème déjà démontré (V. *Annales*, II, 268) que les trois points de rencontre des droites conjuguées passant par O avec les côtés du triangle inscrit, sont trois points situés en ligne droite.

Problème (*fig.* 43). Par deux des sommets B, A d'un triangle ABC, on mène aux côtés opposés AC, BC, sous des directions données m, n, deux droites qui se coupent en H; trouver sur le plan du triangle le lieu des points O tel qu'en menant par ce point, sous les mêmes directions m, n, des droites OA′, OB′, aux côtés AC, BC, et joignant A′B′, cette dernière droite passe par le milieu de OH.

Solution. Soit O (α, β) un des points du lieu cherché; $CA = a$, $CB = b$; CA, CB étant pris pour axes des x et des y. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; les coordonnées des deux points H et M milieu de OH; on aura :

$$\text{H}\left[x_1 = \frac{an+b}{n-m},\quad y_1 = \frac{n(am+b)}{n-m},\right.$$

$$\text{M}\left\{x_2 = \frac{(n-m)\alpha+an+b}{2(n-m)},\quad y_2 = \frac{(n-m)\beta+n(am+b)}{2(n-m)}\right\}.$$

On trouve d'ailleurs pour l'équation de A′B′ :

$$\{\text{A}'\text{B}'\}\quad (1)\quad (m\alpha-\beta)y+m(\beta-n\alpha)\,.\,x=(m\alpha-\beta)(\beta-n\alpha).$$

Exprimant que les coordonnées du point M satisfont à l'équation (1), nous arriverons, en simplifiant et en divisant tout par le facteur $n-m$, à cette équation du lieu cherché :

$$(2)\qquad y^2 - 2n\,.\,xy + mn\,.\,x^2 - by - ax = 0\,;$$

donc le lieu cherché est une conique circonscrite au triangle ABC.

Or, je dis de plus que les droites OA′, OB′, dont les directions respectives sont m et n, sont respectivement conjuguées aux côtés AC, BC par rapport à la conique (α), lieu des points O.

On a en effet, entre les directions de deux droites conjuguées par rapport à une conique $Ay^2 + \ldots + F = 0$, la relation (t. I, p. 495) :

$$2Apq + B(p+q) + 2C = 0\,;$$

d'où $$q\{2Ap+B\} = -\{2C+Bp\}\,;$$

d'où $$q = -\frac{Bp+2C}{2Ap+B}.$$

Faisant dans cette formule $p = 0$ pour avoir la direction de la droite conjuguée à l'axe des x, ou à CA, nous trouvons :

$$q = -\frac{2C}{B} = -\frac{2mn}{-2n} = m.$$

Faisant $p = \infty$ pour avoir la direction de la droite conjuguée à CB axe des y, nous trouvons :

$$q = -\frac{B}{2A} = \frac{2n}{2} = n.$$

Nous avons donc ce théorème :

Théorème. Si, par un point O quelconque d'une conique circonscrite à un triangle ABC, on mène deux droites OA', OB' conjuguées à deux des côtés AC, BC de ce triangle, qu'on joigne A'B' ; cette droite passera constamment par le milieu de OH, H étant le *point de rencontre.*

Corollaire. Abaissons aussi OC' conjuguée au troisième côté AB. On verrait de même que la droite A'C' doit passer par le milieu M de OH {car CH sera conjuguée à AB}. Donc le point C' se trouve sur la droite A'M, comme le point B'. Donc les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

C'est le théorème t. II, p. 268 ; et le lemme I se trouve démontré.

Observation. Le théorème qui fait l'objet du lemme 1 est compris *implicitement*, et pour le cas particulier du cercle seulement, dans l'énoncé d'un théorème de M. Steiner sur le quadrilatère (Gergonne, XIX, 38, 1828).

2. Lemme II. Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique ; les quatre sommets pris trois à trois donnent quatre triangles ABC, ABD, ACD, BCD. Soient D', C', B', A' ces quatre *points de rencontre.* Les deux quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont égaux et ont leurs côtés homologues parallèles.

Démonstration. Celle de M. Mention, t. IV, p. 654, pour le cas particulier du cercle, s'applique sans aucune modification au cas général.

3. Venons maintenant à la démonstration du théorème I.

Soient L*d*, L*c*, L*b*, L*a* les droites L relatives aux systèmes suivants formés d'un triangle et d'un point : ABC, D ; ABD, C ; ACD, B ; BCD, A.

D'après le lemme I, la droite	L*d*	passe par le milieu de	DD′.
Id.	L*c*	*id.*	CC′.
Id.	L*b*	*id.*	BB′.
Id.	L*a*	*id.*	AA′.

Mais, d'après le lemme II, les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ ont leurs côtés homologues AB, A′B′, BC, B′C′.... égaux et parallèles, *et d'ailleurs de sens contraire*; donc, à cause des propriétés connues du parallélogramme, les quatre droites DD′, CC′, BB′, AA′ se coupent deux à deux en leur milieu en un même point P ; donc les quatre droites L*a*, L*b*, L*c*, L*d* passent par le même point. C. q. f. d.

Observation I. Ce point P est le centre de similitude inverse des deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′.

Observation II. Il est toutefois important de remarquer que les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ seront inversement situés ; et pour cela il suffira de s'assurer que leurs côtés homologues AB, A′B′, par exemple, sont de sens contraire ; ce que l'on pourra faire par des considérations géométriques très-simples.

Démonstration du Théorème II.

4. Considérons les deux quadrilatères dont les sommets sont :

A, B, C ; D ; et A, B, C ; E.

Soient, pour chacun de ces quadrilatères, ε et δ les points P du théorème précédent ; et soit H le point de rencontre des trois droites conjuguées aux trois côtés du triangle ABC ; d'après le théorème I déjà démontré, le point ε sera au milieu de DH ; le point δ au milieu de DH ; donc, enfin, la droite $\varepsilon\delta$ est parallèle à DE et égale à $\frac{1}{2}$ DE.

Soient de même γ, β, α les trois autres points P relatifs aux autres quadrilatères formés avec les sommets du pentagone inscrit ; on verra de même que :

$\delta\gamma$	est parallèle	à DC	et égal à	$\frac{1}{2}$ DC ;
$\gamma\beta$	*id.*	à CB	*id.*	$\frac{1}{2}$ CB ;
$\beta\alpha$	*id.*	à BA	*id.*	$\frac{1}{2}$ BA ;
$\alpha\varepsilon$	*id.*	à AC	*id.*	$\frac{1}{2}$ AC.

Donc, enfin, le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ formé avec les cinq points P des cinq quadrilatères sera semblable au polygone ABCDE ; ces deux polygones ayant de plus leurs côtés homologues parallèles, et le rapport linéaire de similitude de $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ à ABCDE étant celui de 1 à 2. Donc ce pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ pourra être inscrit dans une conique semblable à la conique circonscrite à ABCDE et semblablement placée ; le rapport de similitude de cette dernière à la première étant celui de 2 à 1. C. q. f. d.

5. *Théorème III.* Soit ABCD un quadrilatère inscrit à une conique. Construisons le quadrilatère A'B'C'D' du lemme II ; il sera inscriptible, comme le premier, dans une conique homothétique. Des points A et A' abaissons respectivement des droites conjuguées aux côtés des deux triangles correspondants BCD et B'C'D'. Les six points d'intersection de chaque côté avec la droite conjuguée correspondante sont six points en ligne droite.