NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRASSINE

Note sur les rosettes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 209-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__209_0>

NOTE SUR LES ROSETTES,

PAR M. BRASSINE,
Professeur à l'école d'artillerie à Toulouse.

—

J'ai donné, dans un mémoire lu à l'Académie de Toulouse, diverses propositions parmi lesquelles j'ai énoncé un théorème qui n'est qu'une extension facile du théorème de M. Babinet. Je viens de lire dans les comptes rendus de l'Institut que M. Breton [de Champ] (8 mai, p. 494) avait fait des recherches analogues. Je vous prie d'insérer la note suivante, que je vous avais déjà envoyée en décembre 1847.

1° M. Babinet, dans un des derniers numéros des comptes rendus de l'Institut, a énoncé le théorème suivant (27 septembre 1847, p. 441) :

« Si par un point d'une surface courbe quelconque on » mène une normale, et par cette normale m plans de section, » faisant des angles dièdres successifs égaux [illegible] à $\frac{2\pi}{m}$, la » somme des courbures des sections normales au point » que l'on considère, élevées chacune à la puissance -1, » sera égale à une constante multipliée par le nombre m des » sections. »

On peut donner à ce théorème l'extension suivante : « La » somme des puissances $-p$ des rayons de courbure des m » sections, sera encore une constante multipliée par m, si » $2p < m$; p est entier. »

2° « Si à partir du pied de la normale à la surface, on » prend sur chaque courbe des sections normales un arc in-

» finiment petit ds, et si par le point extrême de chacun de » ces arcs égaux, on mène une normale à la surface, chaque » normale fera avec la section qui passe par son pied sur la » surface un angle infiniment petit de l'ordre ds; cela posé, » la somme des puissances p de tous ces angles, ou de leurs » sinus, sera une constante multipliée par le nombre des » sections. » (Ce qu'on déduit d'un théorème de M. Bertrand, journal de M. Liouville, t. IX, p. 133, 1844.)

Des théorèmes semblables en grand nombre se rencontrent dans la théorie des sections coniques. Ainsi, par exemple, si par le centre d'une ellipse on mène des rayons quelconques terminés à cette courbe, faisant deux à deux des angles égaux à $\frac{2\pi}{m}$, on trouvera que la somme des puissances $-2p$ de ces rayons vaudra une constante multipliée par leur nombre si $2p < m$.

Si, au lieu des rayons de l'ellipse, on considère la longueur des perpendiculaires, abaissées du centre sur les tangentes et faisant entre elles successivement des angles $\frac{2\pi}{m}$, la somme des puissances $2p$ de ces perpendiculaires vaudra une constante multipliée par m.

De la même manière on verrait que la somme des puissances $-p$ des cordes de l'ellipse menées par un foyer et faisant deux à deux des angles $\frac{2\pi}{m}$, est une constante multipliée par m; $2p<m$.

Un théorème analogue aurait lieu pour une courbe du degré $2m$, dont l'équation devient

$$(x^2+y^2)^m+Ax^{2m-2}+Bx^{2m-4}+\ldots+Sx^2+U=0,$$

en menant sous des angles $\frac{2\pi}{m}$ des rayons du centre à la courbe.

Note. Nous dirons derechef (*voir* t. IV, p. 183) qu'il y a quatre-vingt-six ans que Waring a donné la théorie complète des *rosettes*. Voici le titre *in extenso* de son ouvrage : Proprietates algebraicarum curvarum ab Edwardo Waring. M.D. matheseos professore Lucasiano, cantab. reginæ societatis et bononiensis scientiarum academiæ socio, Cantabrigiæ, MDCCLXXII, in-4°, XI, 123, 7 planches. Mais la première édition est de 1762. Ce petit volume renferme les grandes théories, les propriétés générales des courbes algébriques exposées suivant la véritable méthode cartésienne, qui ne consiste que dans l'application des théories équationnelles aux lignes géométriques et ce qui contraste si fortement avec tant de productions modernes, volumineuses minuties dont la grosseur rappelle l'embonpoint fallacieux des hydropiques. Or, après avoir donné la théorie segmentaire des sécantes, celle des diamètres de divers genres avec leurs enveloppes, des centres avec leurs lieux géométriques, la théorie des sous-tangentes, les asymptotes, les moyens si féconds de transformation, etc., Waring pose ce problème ; il est le 15ème. Étant donnée l'équation de degré n d'une courbe, si de l'origine on mène des rayons vecteurs divisant une circonférence décrite de cette origine comme centre en p parties égales, trouver une équation qui ait pour racines les p rayons vecteurs. La solution de ce problème qu'il donne, renferme implicitement toute la théorie des *rosettes*. En effet, toute courbe algébrique a pour équation polaire une expression ordonnée suivant les puissances du rayon vecteur ayant pour coefficients des lignes trigonométriques de l'argument ; pour une valeur donnée de l'argument ω, on trouve la valeur correspondante des fonctions symétriques de ρ en fonction des mêmes lignes trigonométriques, et l'argument croissant en progression arithmétique, comme il arrive dans les rosettes, on sait évaluer la somme de ces progressions. Toutes ces évaluations, traduites en géométrie, fournissent avec une extrême facilité des théorèmes en nombre infini comme les fonctions symétriques ; c'est un océan sans bords (*). Voici les propres paroles de Waring. On sait qu'il a fondé la théorie des fonctions symétriques dans son ouvrage intitulé : *Meditationes algebraicæ*, ayant indiqué diverses applications du problème XV, il ajoute : *facile deduci possint proprietates curvarum quæ correspondent singulis propositionibus in nostr. inedit. algeb. contentis. analytica cum problema facile in geometrica transformari possint et vice versa* (p. 57). Naguère M. Babinet a annoncé à l'Académie un théorème de *rosettes* sur les rayons de courbure des sections normales à une surface, et séance tenante M. Duhamel en a donné la démonstration. En effet, les théorèmes découverts par Euler sur ces rayons de courbure, sont graphiquement représentés dans les *indicatrices* de M. Dupin ; dès lors on n'a plus affaire qu'à des rosettes formées par des demi-diamètres dans une conique.

Le reste de l'ouvrage de Waring est consacré aux propriétés des épicycloïdes, à la manière de trouver des rectifications, des rayons de courbure, etc. ; des propriétés des surfaces, des courbes à double courbure, des polygones inscrits et circonscrits jouissant de quelque propriété maximum et minimum. Le théorème XX (p. 105), si je l'ai bien compris, est faux ; il vient à dire que deux polygones *réguliers* d'un même nombre de côtés inscrits dans une ellipse, ont le même *périmètre*. Cette égalité ne subsiste que pour les aires.

On trouve, p. 118, l'énoncé d'un curieux théorème sur l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole conique, et qui montre que l'illustre analyste possédait la formule qui

(*) M. Chasles vient d'insérer dans les Comptes rendus (22 mai, p. 531) une foule de propriétés de rosettes.

exprime l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées, des sommets. Voici le théorème, et pour fixer les idées, nous prendrons le pentagone ABCDE inscrit dans une parabole d'Apollonius; projetons les sommets orthogonalement sur une droite perpendiculaire à l'axe, en a, b, c, d, e; alors l'aire du polygone, multipliée par le double du paramètre principal, est égale à

$$ab.bc.ac + ac.cd.ad + ad.de.ae,$$

ou bien aussi en commençant par l'autre bout:

$$ed.dc.ec + ec.cb.eb + eb.ba.ea;$$

c'est l'identité que M. P. Serret a démontrée analytiquement (p. 199).

Revenons aux *rosettes*. M. E.-F. Auguste, directeur d'un gymnase à Berlin, est auteur de ce théorème : *Dans le plan d'un cercle, on forme une rosette de* $4n+2$ *rayons terminés à la circonférence, la somme des rayons de rang pair est égale à la somme des rayons de rang impair, quel que soit le rayon qu'on prenne pour le premier.* (Crelle, p. 387, 1837.)

En établissant une autre loi d'accroissement pour l'*argument* que la progression arithmétique, on obtient d'autres théorèmes. Le plus célèbre théorème de ce genre, aussi le premier en date et toujours le plus utile, est celui de Côtes, généralisé par Moivre.

Ayant communiqué dernièrement le théorème de M. Auguste à M. Breton (de Champ), l'excellent géomètre l'a ainsi généralisé :

« *Si dans le plan d'un cercle on construit une rosette de*
» $4n+2$ *rayons terminés à la circonférence, la somme des*
» *rayons impairs élevés à la puissance entière quelconque* p, *est*
» *égale à la somme des rayons pairs élevés à la même puissance,*
» *tant que l'on a* $p < 4n+2$, p *étant impair.*

» Et plus généralement, pour une rosette de $2n$ rayons : *la*

» ***somme des puissances*** p ***de ces rayons est constante lorsque cette***
» ***rosette tourne autour de son centre, tant que l'on a*** p $<$ 2n;
» ***cette somme est nulle quand*** p ***est impair***. (Le mot somme est
» pris ici dans le sens algébrique.)

» Cela tient à ce que l'équation du cercle exprime x^2+y^2
» en fonction d'un trinôme de premier degré en x, y; il est
» bien entendu que le théorème de Moivre est l'instrument de
» démonstration.

» Si l'on prend une courbe dont l'équation soit de cette
» forme :

$$(x^2+y^2)^m + u_{2m-1} + u_{2m-2} + \dots u_2 + u_1 + u_0 = 0;$$

» u_i étant un polynôme quelconque entier, rationnel et homo-
» gène de degré i en x, y, on a les mêmes propriétés que pour
» le cercle, à cette seule différence près que le degré des fonc-
» tions qui demeurent constantes comporte d'autres limites.
» La lemniscate, dans laquelle le produit des distances de son
» point à deux points fixes est constant, a précisément une
» équation de cette forme et se prête à des énoncés où la limite
» de p n'est que la moitié de celle du cercle. »