NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Extension du théorème 161 de M. Joachimstal à la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 206-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__206_1>

EXTENSION DU THÉORÈME 161 (Voir p. 114)

de M. Joachimstal à la parabole.

PAR M. MENTION.

De même que par les deux autres théorèmes de M. Joachimstal, l'énoncé donné n° 161 s'applique à l'hyperbole ; mais dans la parabole il n'a plus de sens, tandis que celui qu'on lit à la page 117 du tome VII de ces Annales s'applique parfaitement à cette courbe. Ainsi, le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

(*) On obtiendrait une économie de temps, en publiant un recueil de toutes les intégrales définies connues, de leurs relations et transformations, ainsi que des transcendantes périodiques ; le tout rangé suivant un certain ordre. Lequel suivre ? Tm.

« *La somme des lignes obtenues en projetant les longueurs de deux normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement la parabole, sur les rayons vecteurs de ces points, est égale à la corde focale parallèle à la droite qui les joint.* »

1. Soient (x', y') (x'', y'') les coordonnées des extrémités d'une corde; la longueur de la corde focale, parallèle à cette première, est $x'+x''+2p+\frac{y'y''}{p}$ (p est le demi-paramètre). C'est le résultat d'un calcul simple.

La distance du sommet de la parabole à une tangente est $x' \cos i$, x' étant l'abscisse du point de contact, i l'angle de la normale avec le rayon vecteur.

Les coordonnées du point de concours des deux normales aux points $(x'y')$ $(x''y'')$, sont :

$$\alpha = p + x' + x'' + \frac{y'y''}{2p}, \quad \beta = -\frac{y'y''(y'+y'')}{2p^2}.$$

2. Ce qu'il s'agit de prouver, c'est que :

$$n \cos i + n' \cos i' = x' + x'' + 2p + \frac{y'y''}{p}.$$

Pour cela, prenons encore les *puissances* des points A et A' par rapport au cercle décrit sur la distance du sommet de la parabole au point N de concours des deux normales, comme diamètre. •

L'équation de ce cercle est $x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y = 0$; donc les puissances sont

$$x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y', \quad x''^2 - \alpha x'' + y''^2 - \beta y''.$$

Or, il est aisé de voir que chacune de ces puissances représente np_1, $n'p'$, n,n' étant les longueurs AN, A'N, p_1 et p' les distances du sommet aux deux tangentes.

Ainsi

$$np_{1} = x'^2 - \alpha x' + y'^2 - \beta y', \quad n'p' = x''^2 - \alpha x'' + y''^2 - \beta y''.$$

Remplaçant p_1 et p' par leurs valeurs $x' \cos i$, $x'' \cos i'$, on aura :

$$n \cos i = x' - \alpha + \frac{y'^2}{x'} - \frac{\beta y'}{x'} = x' - \alpha + 2p - \beta \cdot \frac{2p}{y'},$$

$$n' \cos i' = x'' - \alpha + 2p - \beta \cdot \frac{2p}{y''},$$

en sorte que

$$n \cos i + n' \cos i' = x' + x'' - 2\alpha + 4p - \beta \cdot 2p \frac{y' + y''}{y'y''}.$$

Mettant par α, β les valeurs qui sont écrites plus haut, cette expression devient :

$$x' + x'' - 2p - 2x' - 2x'' - \frac{y'y''}{p} + 4p + \frac{(y' + y'')^2}{p} =$$

$$= 2p + x' + x'' + \frac{y'y''}{p}, \text{ C. Q. F. D.}$$

3. Si la corde devient tangente à la parabole, $n = n' =$ le rayon de courbure.

Et alors $2n \cos i = f$, $n = \frac{f}{2 \cos i}$ (f est la longueur de la corde focale parallèle à la tangente) ou bien comme $\frac{f}{2} = \frac{p}{\cos^2 i}$, $n = \frac{p}{\cos^3 i}$, expression connue de la valeur du rayon de courbure.

Si l'on prend trois points tels que les normales en ces points concourent, la proposition énoncée au haut de la page 118 n'est pas vraie.

On peut d'ailleurs, comme pour l'ellipse, calculer la somme des projections des longueurs normales sur les rayons vecteurs correspondants.