NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Démonstration analytique de l'identité de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 199-201

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__199_1>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

de l'identité de Waring (Voir t. IV, p. 183).

PAR M. PAUL SERRET.

—

Identité. Soient n quantités quelconques $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, on a l'identité :

$$\begin{gathered}a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots\ldots+\\+(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1})a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+\\+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots\ldots+\\+(a_n+a_{n-1}+\ldots\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots\ldots+a_2+a_1).\quad(1)\end{gathered}$$

Démonstration. L'identité est évidente pour le cas de $n=2$; car on a $a_1a_2(a_1+a_2)=a_2a_1(a_2+a_1)$. Donc il suffira de prouver que si l'identité (1) est vraie pour n quantités, elle sera vraie aussi pour $n+1$ quantités ; ou, en d'autres termes, il suffira de prouver que si l'égalité (1) existe, l'égalité suivante existe aussi :

$$a_1a_2(a_1+a_2)+(a_1+a_2)a_3(a_1+a_2+a_3)+\ldots\ldots+$$
$$+(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{n-1})a_n(a_1+\ldots\ldots+a_n)+$$
$$+(a_1+\ldots\ldots+a_n)a_{n+1}(a_1+\ldots\ldots+a_{n+1})=a_{n+1}a_n(a_{n+1}+a_n)+$$
$$+(a_{n+1}+a_n)a_{n-1}(a_{n+1}+a_n+a_{n-1})+\ldots\ldots+$$
$$+(a_{n+1}+a_n+\ldots+a_2)a_1(a_{n+1}+a_n+\ldots+a_2+a_1). \qquad (2)$$

Désignons respectivement par P et Q le premier et le deuxième membre de l'égalité à démontrer (2).

Or, en ayant égard à l'égalité (1), on peut écrire P ainsi qu'il suit :

$$P=\overline{a_{n+1}}^2(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+$$
$$+a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots\ldots+$$
$$+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1).$$

Maintenant, si nous développons de même Q par rapport aux puissances décroissantes de a_{n+1}, nous trouverons :

$$Q=\overline{a_{n+1}}^2(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1)+a_{n+1}\left[\overline{a_n}^2+a_{n-1}(a_n+a_{n-1})+\right.$$
$$+a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots+a_1(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2+a^1)]+$$
$$+a_{n+1}[a_na_{n-1}+a_{n-2}(a_n+a_{n-1})+a_{n-3}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+$$
$$+\ldots+a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2)]+a_na_{n-1}(a_n+a_{n-1})+$$
$$+(a_n+a_{n-1})a_{n-2}(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})+\ldots+$$
$$+(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_2)a_1(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a^1).$$

Dans P et Q ainsi développées, les parties indépendantes de a_{n+1} sont identiquement égales, ainsi que les parties contenant le carré de a_{n+1} en facteur. Quant aux termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun, il est facile de voir qu'on peut écrire leur ensemble sous cette forme :

$$a_{n+1}[\Sigma\overline{a_n}^2+\Sigma.2a_na_{n-1}];$$

$\Sigma\overline{a_n}^2$ représentant la somme des carrés des n quantités $a_1,\ldots\ldots,$ a_n, et $\Sigma.2a_na_{n-1}$ représentant la somme des doubles produits de ces n quantités prises deux à deux. Mais d'après la composition du carré d'un polygone, on a :

$$(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1)^2=\Sigma a_n^2+\Sigma.2a_na_{n-1}.$$

Donc l'ensemble des termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun est identique à l'ensemble des termes de P contenant le même facteur ; et d'ailleurs les autres parties de P et Q étant les mêmes, on a l'identité $P=Q$, ou l'égalité (2). C Q. F. D.

Note. Waring parvient à cette identité à l'aide d'une double expression qui donne l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole. Tm.