NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur le centre de forces non parallèles de Minding, d'après Mœbius

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 179-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__179_0>

SUR LE CENTRE DE FORCES NON PARALLÈLES de Minding, d'après Mœbius (Crelle, XVI, 1-1836)

—

1. Dans tout ce qui suit, on suppose un système de forces appliquées à un corps ou à un système de points liés entre eux d'une manière *invariable*. Le système de points éprouve un déplacement, mais, dans ce déplacement, chaque point d'application conserve sa force la même en intensité, direction et sens. C'est ce qu'il ne faut jamais perdre de vue.

A. *Système de forces parallèles.*

a) *Résultante*. Quelque déplacement que subit le système, la résultante passe toujours par un même point lié invariablement aux points du système et qui est le centre des forces parallèles.

b) *Équilibre*. Soit A le centre et R la résultante des forces parallèles agissant dans un sens et B le centre, et —R la résultante des forces parallèles agissant dans le sens opposé; AB est dans la direction des forces. Dans un déplacement, R et —R forment un couple et l'équilibre est détruit, trois cas exceptés :

1° Lorsque A et B se confondent; 2° lorsque le système se déplace parallèlement à lui-même; 3° lorsque le système tourne autour d'un axe parallèle à la direction des forces. Du reste, on peut appliquer à deux points A′ et B′ deux nouvelles forces égales agissant dans la direction des forces et en sens opposés, A′B′ étant aussi dans la direction des forces; l'équilibre subsiste encore, et alors l'équilibre aura lieu dans tout déplacement, puisque les forces introduites formeraient un couple tenant en équilibre l'autre couple.

c) *Couple*. Rentre dans le cas précédent.

B. *Systèmes de forces dans un même plan.*

Le corps se meut parallèlement à lui-même, ou tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan.

a) *Résultante de deux forces.* Soit A le point de rencontre des deux forces, et B, C leurs points d'application ; la résultante passera toujours par le point A′, seconde intersection de la résultante avec le cercle passant par les points A, B, C ; le point A′ lié invariablement aux points B et C est donc le *centre* des deux forces. C'est une consequence immédiate de l'égalité des angles inscrits dans un segment de cercle.

Résultante d'un nombre quelconque de forces. On prend deux forces quelconques et on les remplace par une force unique appliquée au *centre* de ces deux forces ; par là le nouveau système a une force de moins, et continuant de même, on parvient à deux forces dont le *centre* est celui du système primitif.

Comme le système n'a qu'un *centre*, il est indifférent dans quelque ordre on fasse la composition des forces, ce qui donne lieu à d'élégantes propositions géométriques.

b) *Équilibre.* Soit n forces ; considerons une force P appliquée en A, les $n-1$ forces restantes auront une résultante $-$P, qu'on peut considérer comme appliquée à leur centre B. Prenons dans le corps deux points quelconques A′, B′, tels que A′B′ soit parallèle à AB, et appliquons en A′ une force $+$S, en B′ une force $-$S ayant la direction A′B′, et telles que $S.A'B' = P.AB$; l'équilibre subsistera alors toujours lorsque le plan tournera dans son plan.

c) *Couple.* Se réduit au cas précédent.

C. *Système de forces dans l'espace en général.*

a, 1) *Équilibre.* Un corps passant d'une position dans une autre, on peut toujours trouver une direction telle que le corps, dans sa première position, tournant autour d'un axe ayant cette direction, prenne une position parallèle à la seconde ; et si le corps, tenu en équilibre dans sa position première, reste encore en équilibre après un mouvement de rotation autour de l'axe ci-désigné, il restera encore en équilibre dans une rotation quelconque autour de cet axe et par une translation parallèle.

Nous nommerons *axe d'équilibre* une droite telle que l'équilibre n'est pas troublé, le corps tournant autour de cet axe. Ainsi, dans un système de forces parallèles en équilibre, toute droite parallèle à la direction des forces est un axe d'équilibre.

a, 2) Pour qu'une droite soit un axe d'équilibre, il est *nécessaire* et *suffisant* que cette droite soit un axe d'équilibre pour les forces projetées avec leurs points d'application sur un plan perpendiculaire à cette droite, et ensuite qu'en projetant chaque force sur une droite menée par son point d'application, parallèlement à l'axe d'équilibre, le système projeté soit en équilibre.

a, 3) Lorsqu'un système a deux axes d'équilibre non parallèles, toute droite parallèle au plan déterminée par les deux axes d'équilibre sera aussi un axe d'équilibre.

De là on conclut facilement que si le système a trois axes d'équilibre tels que l'un n'est pas parallèle au plan déterminé par les deux autres, alors une quatrième droite quelconque sera axe d'équilibre ; ou, en d'autres termes, si un corps en équilibre est maintenu dans cet état, dans trois déplacements, il sera encore en équilibre en un quatrième déplacement ; ou autrement, tout corps en équilibre en quatre positions diverses reste en équilibre dans une cinquième position.

a, 4) Un système en équilibre n'a pas, en général, un *axe d'équilibre*. Toutefois il est toujours possible d'ajouter au système en équilibre deux nouvelles forces égales et directement opposées, agissant sur deux points déterminés du corps et conservant même intensité, direction et sens ; et par là le corps acquiert un axe d'équilibre, ce qu'on peut énoncer aussi de cette manière : L'équilibre d'un corps tournant autour d'un axe est détruit et se change en un couple dont les forces R et —R peuvent agir sur des points A, B du corps, conservant toujours même intensité, sens et direction.

Les points A et B sont pris arbitrairement ; mais la direction AB est déterminée ainsi que le produit R.AB.

b, 1) *Non en équilibre.* On peut produire l'équilibre par l'introduction de deux nouvelles forces, et on peut déterminer ces forces d'une infinité de manières, de telle sorte que le système tournant autour d'un axe donné reste en équilibre; car il existe un hyperboloïde à une nappe, déterminé par la nature du système et par la position de l'axe de rotation, et tel qu'on peut prendre arbitrairement les deux points d'application des deux nouvelles forces sur une des droites génératrices de la surface.

b, 2) Les deux nouvelles forces peuvent se déterminer, ainsi que leurs points d'application, de *deux* manières ou d'*aucune* manière, de telle sorte 1° que la droite qui réunit les deux points d'application devienne *axe d'équilibre ;* et de là, en rendant fixe cet axe, le corps, en tournant autour, conservera son équilibre sans que l'on ait besoin d'ajouter deux forces, et 2° que les pressions sur l'axe restent les mêmes en direction et intensité pendant la rotation. Nous nommerons un tel axe *axe principal d'équilibre.*

Ainsi, par exemple, dans un système de deux forces qui ne sont pas dans un même plan, l'un des *axes principaux* est la droite qui joint les deux points d'application, et l'autre est la droite perpendiculaire à un plan déterminé par les deux droites, et rencontrant ce plan au centre des deux forces projetées sur ce plan.

Ceci a lieu aussi pour deux forces non parallèles situées dans un même plan, et lorsque l'on a égard, non à la rotation dans le plan, comme en B, mais à une rotation quelconque.

Système de forces parallèles à un même plan, ou dans un même plan. On mène dans le plan deux droites *a, b*, et l'on décompose chaque force P du système au point d'application en deux autres X et Y, parallèles à ces droites, et l'on détermine la résultante $X_{,}$ des forces X et le centre A de ce système; et de même la résultante $Y_{,}$ du système Y et le centre B; alors dans tout déplacement du corps le système est équivalent aux forces $X_{,}$, $Y_{,}$, agissant en A et B, et a, par conséquent, deux axes principaux dont l'un est la droite AB et l'autre une droite coupant perpendiculairement le plan au centre des forces projetées sur ce plan. De là on déduit ce théorème remarquable :

α) Si l'on a un système de forces parallèles à un plan et ayant une résultante, si l'on décompose chaque force à son point d'application en deux autres parallèles à deux droites *a*, *b* quelconques menées dans le plan, la droite qui joint les deux centres de forces parallèles a une position indépendante des droites *a* et *b*, nous nommerons cette droite *ligne centrale du système*.

Ce théorème se généralise ainsi :

β) Étant donné un système de forces non en équilibre et ne se réduisant pas en un couple, si l'on décompose chaque force en son point d'application en trois autres, X, Y, Z, parallèles à trois droites arbitraires, *a*, *b*, *c*, non parallèles au même plan, les trois centres des systèmes X, Y, Z sont dans un plan indépendant des droites *a*, *b*, *c*; nous nommons ce plan *plan central du système*.

Si les droites *a*, *b* sont parallèles au *plan central* et *c* perpendiculaires à *a* et *b*, alors, selon α), les centres des systèmes X et Y sont dans une même droite, située, selon β), dans le plan central; nous la désignons sous le nom de *ligne centrale* d'un système de forces quelconques, agissant dans l'espace. Si de plus la droite *a* est parallèle à la ligne centrale, et que *b* soit perpendiculaire sur *a*, alors nous nommons le centre des forces X, parallèles à *a*, le *point central* du système.

Les deux axes principaux ont, relativement à ce plan, ligne et point centraux, la position remarquable suivante :

b 3) Les deux axes principaux, lorsqu'ils existent, et la ligne centrale, sont parallèles au même plan; les deux points d'intersection des axes principaux avec le plan central, et le point central sont sur une même droite perpendiculaire à la direction de la résultante des forces transportées à un même point.

c, 1) *Système de forces dans l'espace ayant une résultante.* Lorsqu'un tel système tourne autour d'un axe, il se réduit à deux forces qu'on peut transporter, sans changer la direction ni l'intensité, à deux points déterminés du corps, et qui ne peuvent se réduire à une seule force que dans la position initiale du corps, et ensuite après une demi-rotation.

c) Dans un tel système, les deux axes principaux existent toujours, c'est-à-dire on peut toujours déterminer deux droites, coupant la résultante en deux *points*, et telles qu'en tournant le corps autour d'une de ces droites, le système ne cesse pas de se réduire en une résultante de même direction et intensite que la résultante initiale; que par conséquent, lorsque un de ces points d'intersection est rendu fixe, alors l'équilibre subsistera en tournant autour de l'axe passant par ce point. Ainsi les deux points peuvent être considérés comme de vrais centres du système, quoique par rapport à chacun l'équilibre ne subsiste que relativement à un axe déterminé.

Ces deux axes ont une telle position : 1° leurs projections sur un plan perpendiculaire à la résultante se coupent à angle droit; 2° de même leurs projections sur le plan central; 3° la ligne centrale est parallèle au plan déterminé par les deux axes; 4° les deux points d'intersection du plan central, et les deux axes et le point central seul, sont une même droite qui est à angle droit sur la résultante.

d) Système de forces dans l'espace, réductible à un couple. Un tel système n'a pas *en général* d'axes principaux; s'ils existent, ils sont en nombre infini; chaque parallèle à un axe principal devient un axe principal. Nous terminerons par cette observation. Si un corps soumis aux actions d'un système de forces a un axe fixe, et s'il doit conserver l'équilibre en le faisant tourner autour de cet axe, et si on n'exige pas que cet axe, ainsi que cela doit être pour un axe principal, supporte pendant la rotation une pression constante en direction et intensité, alors si le système se réduit à une force unique ou à deux forces, cet axe peut avoir une direction quelconque. Il suffit de projeter toutes les forces sur un plan perpendiculaire à la direction donnée; la droite passant par le centre de ces forces (B, *b*) parallèlement à la direction donnée sera l'axe cherché. Excepté le cas où le système se réduisant à une résultante, on voudrait que l'axe fût parallele à cette résultante, et si les forces avec leurs points d'application étant projetées sur un plan perpendiculaire à la résultante, chaque point projeté n'est pas le centre des autres forces; lorsque cette dernière condition existe, on peut prendre pour axe toute parallèle à la résultante.

Note. Ces belles propriétés ont été trouvées par M. Minding, et sont consignées dans trois mémoires allemands insérés au journal de M. Crelle, savoir : XIV, 289, 1835; XV, 27 et 313, 1836; ces mémoires, qu'on étudie avec un intérêt soutenu, contenant 172 équations, auraient besoin d'être considérablement abrégés pour entrer dans notre recueil.

Voici une idée de ce travail : soit un système de forces dans l'espace appliquée à un système de points liés entre eux d'une manière invariable ; concevons les forces transportées parallèlement à un seul point fixe où elles formeront un faisceau ; faisons tourner ce faisceau autour d'un axe quelconque passant par le point fixe, ensuite menons par chaque point d'application une parallèle à la force correspondante des faisceaux dans sa nouvelle position, conservant même intensité et même sens. On voit que le mouvement du corps que prescrit M. Mœbius ne diffère pas de celui des forces que prescrit M. Minding. Voici maintenant quelques propriétés découvertes par M. Minding et non mentionnées par M. Mœbius.

1° Prenons dans le *plan central* trois centres *conjugués* de forces parallèles et trois-résultantes qui agissent en ces points ; transportons ces trois résultantes en grandeur et en direction en un point, on aura les trois arêtes d'un tétraèdre ; le volume de ce tétraèdre, multiplié par l'aire du triangle qui a pour sommet les trois centres, est un produit constant.

2° Si les trois centres sont sur une même droite, alors dans le mouvement de rotation les trois centres restent fixes et les résultantes tournent autour.

3° Si les trois centres se confondent, le système se réduit à une résultante qui passe par ce point dans tous les mouvements de rotation.

4° Soit un système de forces dans l'espace, ni en équilibre ni réductible à un couple ; il existe une infinité de mouvements de rotation qui amènent le système à avoir une résultante ; toutes ces résultantes passent par une ellipse et une hyperbole ayant le *point central* pour centre commun, et dont les plans sont perpendiculaires entre eux et sur le *plan central ;* les foyers d'une de ces coniques sont les sommets de l'autre.