NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BORGNET

Sur la géométrie sphérique analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 174-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__174_1>

SUR LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ANALYTIQUE.

(V. p. 147.)

PAR M. BORGNET,
professeur de mathématiques au lycée de Tours (*).

---

§ IV. *Des coniques sphériques.*

Réduction de l'équation générale des lignes du deuxièm

ordre à la forme unique $\frac{\text{tang}^2 y}{\text{tang}^2 b} + \frac{\text{tang}^2 x}{\text{tang}^2 a} = 1$. Conditions pour que l'équation générale des lignes du deuxième ordre représente un cercle. Quand on cherche le lieu du sommet d'un triangle sphérique dont la base et la surface sont constantes, on trouve une équation du deuxième degré; donc le lieu est une conique sphérique; de plus, les conditions précédentes sont remplies; donc cette conique est un petit cercle. C'est le beau théorème de Lexell. On trouve une ligne du deuxième ordre quand on cherche le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes est constante; le lieu est donc une conique sphérique : c'est le théorème de Fuss. On vérifie avec la même facilité le théorème de Magnus sur l'égalité des angles que forment, avec l'arc tangent à la conique, les deux arcs vecteurs menés des deux foyers au point de tangence, et tant d'autres propositions qui sont dues soit à M. Steiner, soit à M. Chasles.

J'étends aux coniques sphériques quelques belles propriétés des coniques planes, savoir : la propriété des pôles et ses polaires de La Hire; la propriété de l'involution de Desargues; la description d'une conique à la manière de Maclaurin et de Braikenridge; l'hexagramme de Pascal et le théorème correspondant de Brianchon. Je généralise ainsi ces deux dernières propriétés :

A. Si une conique sphérique est traversée par un triangle sphérique, on obtient, en menant sur la surface de la sphère les cordes des arcs interceptés entre les côtés, un second triangle sphérique dont les côtés et les sommets correspondent aux côtés et aux sommets du premier. Il arrive toujours que 1° les intersections des côtés correspondants sont placés sur une même circonférence de grand cercle; 2° les arcs qui unissent les sommets correspondants concourent au même point.

B. Si une conique sphérique est traversée par un triangle sphérique, on obtient, en menant une tangente à la conique par les deux extrémités de chaque côté, un second triangle dont les sommets (intersections de ces tangentes) correspondent aux sommets du premier triangle et dont les côtés ont aussi leurs correspondants parmi ceux du premier. Il arrive toujours que 1° les arcs de grand cercle qui unissent les sommets correspondants concourent au même point; 2° les intersections des côtés correspondants sont placées sur une même circonférence de grand cercle.

§ V. *Des lignes sphériques en général.*

Etant donnée l'équation d'une ligne sphérique quelconque, soit algébrique, soit transcendante, je forme l'équation de sa tangente en un point, celle de sa normale, l'équation générale de sa polaire; je détermine l'angle sous lequel se coupent deux lignes sphériques données par leurs equations.

Je forme quelques lieux géométriques, par exemple, le lieu du centre d'un cercle variable tangent à deux petits cercles fixes; c'est une conique sphérique: le lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une conique; c'est une ligne du quatrième ordre qui se réduit à une conique si l'angle est droit, d'où résulte que l'enveloppe des cordes de 90° inscrites à une conique est elle-même une conique, laquelle se réduit à un point si la conique proposée a un axe de 90°, etc., etc.

§ VI. *Emploi d'un autre système de coordonnées*

Dans cette dernière partie, les lignes sphériques sont exprimées par des équations entre la longitude et la latitude de leurs points. Ces nouvelles coordonnées ont quelques avantages sur les coordonnées employées plus haut, comme de représenter d'une manière plus simple certaines lignes dont l'usage est le plus fréquent, le cercle, par exemple, et de donner des formules aussi plus simples pour la quadrature, la rectification et l'angle formé par deux courbes en se coupant; mais, sous un point essentiel, le nouveau système le cède à l'autre, c'est qu'il n'offre pas de caractères pour la classification des courbes, de sorte qu'une même ligne n'est plus reconnaissable à son équation lorsqu'elle présente des différences de position par rapport aux axes.

J'établis les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre système; j'applique le nouveau système à la détermination des espaces quarrables de Viviani, à la rectification de la loxodromie sphérique, à la formation de l'équation des projections stéréographiques, à la considération de la spirale de Pappus et d'une Clélie de Guido Grandi, etc.