NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEGALLAIS

Solution de la question 177

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 171-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__171_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 177,

(Fin.) (V. p. 126.)

PAR M. LEGALLAIS,
Élève du Collége militaire de La Flèche.

—

Quatrième cas (fig. 23).

L'équation du lieu devient $y^2 = -x^2 + \sqrt{4R^2x^2 + m^4}$, le signe — du radical devant évidemment être écarté ; l'origine est alors le point de contact des deux cercles.

Pour que y soit réel, il faut que $4R^2x^2 + m^4$ soit $> x^4$, ou qu'on ait $x^4 - 4R^2x^2 - m^4 < 0$, c'est-à-dire que x^2 soit compris entre les racines de l'équation $x^4 - 4R^2x^2 - m^4 = 0$, qui sont $x_{,}^2 = 2R^2 + \sqrt{4R^4 + m^4}$, $x_{,,}^2 = 2R^2 - \sqrt{4R^4 + m^4}$. La limite $x_{,,}^2$ étant négative, doit être rejetée et remplacée par 0, c'est-à-dire que x doit être compris entre

$$+\sqrt{2R^2 + \sqrt{4R^4 + m^4}} \text{ et } -\sqrt{2R^2 + \sqrt{4R^4 + m^4}},$$

valeurs plus grandes que 2R en valeur absolue. Prenant donc $A_{,}$ et $A_{,,}$ pour ceux qui correspondent à ces valeurs, la courbe est comprise entre les parallèles à l'axe des y menés par ces points.

Pour $x = 0$, on a $y = \pm m$; on devait s'y attendre. En effet, pour ce point, les deux tangentes sont égales, et par conséquent chacune d'elles est égale à m; or les triangles omR, oCm sont égaux, donc C$m = m$.

Passons maintenant à la discussion de la tangente pour déterminer, comme dans les cas précédents, la forme précise de la courbe. L'équation peut se mettre sous la forme

$$x^4+(2y^2-4R^2)x^2+y^4-m^4=0, \qquad (5)$$

d'où $\tang \alpha = -\dfrac{4x^3+4y^2x-8R^2x}{4y^3+4x^2y}$.

Pour $y=0$, $\tang\alpha=\infty$, et il n'y a pas d'autre point où il en soit ainsi.

Pour que $\tang\alpha=0$, il faut $4x^3+4y^2x-8R^2x=0$, ce qui donne encore, comme dans les autres cas, $x=0$; puis il reste $x^2+y^2=2R^2$, et, en combinant cette équation avec l'équation (5), on trouve à accoupler pour les points où la tangente est parallèle à l'axe des x :

$$x^2=\frac{4R^4-m^4}{4R^2},\quad y^2=\frac{4R^4+m^4}{4R^2}.$$

Il y a donc à examiner trois cas : $4R^4>m^4$, $4R^4=m^4$, $4R^4<m^4$.

1° x^2 est positif, et par conséquent x a des valeurs réelles bien déterminées; et si l'on compare y^2 à m^2, on voit que $4R^4$ étant $>m^4$, et par conséquent $2R^2>m^2$, on pourra poser $2R^2=m^2+\delta^2$, d'où $y^2=\dfrac{2m^4+2m^2\delta^2+\delta^4}{2(m^2+\delta^2)}$, tandis que $m^2=\dfrac{4R^2m^2}{4R^2}=\dfrac{2m^4+2m^2\delta^2}{2(m^2+\delta^2)}$, et qu'ainsi y^2 est $>m^2$. On voit donc qu'ayant pris (*fig.* 21) $CB'=CB''=m$, il y aura quatre points m', m'', m''', m'''', symétriquement placés par rapport à l'origine, tels que leurs ordonnées soient plus grandes que $\overline{CB'}$ et $\overline{CB''}$, et qu'en ces points la tangente est parallèle à l'axe des x; rapprochant ce résultat de ceux que nous avons déjà obtenus, nous trouvons à la courbe la forme représentée dans la figure 21.

2° $x^2=0$, $y^2=\dfrac{2m^4}{2m^2}=m^2$; cela n'indique réellement pas de nouveaux points, puisque ce résultat nous ramène aux points B′ et B″. La courbe est celle de la figure 22.

3° $x^2 < 0$, x est imaginaire ; il n'y a pas d'autres points que B′ et B″. C'est encore la courbe de la figure 22.

Cinquième cas (fig. 24).

$d > 2R$. Alors $R^2 - \frac{1}{4}d^2$ est < 0 ; nous poserons cette quantité égale à $-h^2$, h n'ayant plus ici une interprétation remarquable comme dans le troisième cas, mais étant facile à construire.

L'équation devient donc $y^2 = -h^2 - x^2 + \sqrt{d^2x^2 + m^4}$, le signe — devant être évidemment écarté.

Pour que y soit réel, il faut que $x^2 + h^2$ soit $< \sqrt{d^2x^2 + m^4}$, ou $x^4 + (2h^2 - d^2)x^2 + h^4 - m^4 < 0$, ce qui donne pour x^2 les limites

$$x_{,}^2 = \frac{d^2}{2} - h^2 + \sqrt{\frac{d^4}{4} - d^2h^2 + m^4},$$

$$x_{,,}^2 = \frac{d^2}{2} - h^2 - \sqrt{\frac{d^4}{4} - d^2h^2 + m^4}.$$

Il y a donc encore ici à examiner successivement $m^2 < h^2$, $m^2 = h^2$, $m^2 > h^2$.

1° $m^2 < h^2$, même courbe qu'au troisième cas, pour la même hypothèse.

2° $m^2 = h^2$; ici les deux ovales viennent réellement se réunir en passant par le centre, car le lieu actuel coïncide avec celui *des projections du centre d'une hyperbole sur des tangentes*, et cette génération, par suite de la propriété qu'ont les asymptotes de l'hyperbole d'être les limites des tangentes, nous indique déjà la forme de la courbe, semblable à une *lemniscate* ou à l'ovale de Cassini pour le cas de $d > m$. Ce que le calcul nous donnera ne va donc être en quelque sorte qu'une vérification. D'abord il est facile de vérifier la génération que nous venons d'indiquer ; en effet, le changement de B^2 en $-B^2$ et de h^2 en $-h^2$ dans les calculs faits au troisième cas, nous donne ici pour les deux équations correspondantes :

$$A^2x^2 - B^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$
$$(d^2-2h^2)x^2-2h^2y^2=(x^2+y^2)^2,$$

et l'on voit qu'il est facile de passer des deux cercles à l'hyperbole, et réciproquement. Cherchons maintenant la forme de la courbe. $x_{\prime\prime}^2$ devient nul ; il n'y a que deux points de rencontre Q' et Q'' avec l'axe des x. Pour $y=0$, on ne peut trouver d'autre valeur que $x=0$. En discutant la tangente, on voit qu'elle coïncide en C avec l'axe des x (*fig.* 24), et qu'elle est parallèle à cet axe en quatre autres points m', m'', m''', m''''. L'ensemble de ces renseignements lui assigne la forme que montre la figure.

3° $m^2 > h^2$, même courbe qu'au troisième cas, pour la même hypothèse.

Note. *Règle générale.* Toutes les fois que les termes du 4ème degré d'une ligne plane du quatrième ordre forment un carré parfait, la ligne est le lieu des projections d'un point fixe pris dans le plan d'une conique sur les tangentes à cette conique. (Voir t. III, p. 426.) Tm.