LEBESGUE

Sur les cônes du second degré et sur les ellipses sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 150-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__150_1>

SUR LES CONES DU SECOND DEGRÉ

et sur les ellipses sphériques.

PAR M. LEBESGUE,
professeur à la Faculte de Bordeaux.

---

(1) *Problème.* Trouver le lieu des droites OM telles que la somme des angles COM, C′OM soit constante, OC et OC′ étant deux droites fixes.

Soit $COC' = 2c$; prenons la bissectrice Om pour axe des z, l'axe des x étant perpendiculaire à Om et dans le plan COC′, enfin l'axe des y perpendiculaire en O au plan de zx. En supposant $COM = A$, $C'OM = B$, l'équation sera $A + B = 2a$, $2a$ étant un angle constant plus grand que $2c$. Comme l'on a ·

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos 2a\,;$$

$$(\cos A \cos B - \cos 2a)^2 = \sin^2 A \sin^2 B = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B),$$

on en déduira l'équation

$$\cos^2 A + \cos^2 B - 2 \cos 2a \cos A \cos B = \sin^2 2a$$

Mais

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a\,; \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a\,;$$

de là

$$(\cos A - \cos B)^2 + 4\sin^2 a\cos A\cos B = 4\sin^2 a\cos^2 a.$$

De plus, OM fait avec les trois axes des angles ayant pour cosinus

$$x:\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad y:\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad z:\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

De même, OC fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\sin c$, 0, $\cos c$; enfin OC′ fait avec les axes des angles ayant pour cosinus $-\sin c$, 0, $\cos c$. On aura donc :

$$\cos A = (z\cos c + x\sin c):\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\cos B = (z\cos c - x\sin c):\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

d'où

$$\cos A - \cos B = 2x\sin c:\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et par suite l'équation

$$x^2\sin^2 c + \sin^2 a(z^2\cos^2 c - x^2\sin^2 c) = \sin^2 a\cos^2 a(x^2+y^2+z^2),$$

ou bien encore

$$\cos^2 a\,(\sin^2 a - \sin^2 c)\,x^2 + \sin^2 a.\cos^2 a y^2 + \\ + \sin^2 a(\cos^2 a - \cos^2 c)z^2 = 0.$$
$$\cos^2 a - \cos^2 c = -(\sin^2 a - \sin^2 c)\,;$$

d'ailleurs on a ·

$$\cos^2 a = \cos b\cos c,$$

l'angle b étant celui que la droite OM fait avec Oz quand elle est dans le plan zOy; on aura donc :

$$\cot^2 a.x^2 + \cot^2 b y^2 - z^2 = 0, \qquad (1)$$

ce qui est l'équation d'un cône du second degré; on sait, réciproquement que tout cône du deuxième degré peut être représenté par une équation telle que (1). Donc tout cône a deux lignes focales qui font avec une même génératrice des angles dont la somme est constante.

(2) Il est à remarquer qu'on parviendrait à la même équation en partant de l'équation $A-B=2a$. Voici pourquoi. Imaginons une sphère ayant son centre au sommet du cône ; la courbe d'intersection sera une ellipse sphérique, et si les lignes focales percent la sphère en C, C' dans l'intérieur d'une même nappe et en C_1, C_1' dans l'intérieur de la nappe opposée; si de plus M est un point quelconque de l'ellipse, on aura $CM+C_1M=\pi$, $C'M+C_1'M=\pi$. Soit de plus $CM+C'M=2a$, il en résultera $C_1M+C_1'M=2\pi-2a$. Donc C_1 et C_1' sont également des foyers de l'ellipse. On a aussi $C_1M-C'M=\pi-2a$, $C_1'M-CM=\pi-2a$, donc C_1 et C', ou bien C_1' et C, peuvent être considérés comme foyers d'une hyperbole sphérique (la différence des arcs étant constante) qui ne diffère en rien de l'ellipse sphérique, si ce n'est par la position des foyers.

(3) Si l'on prend $x^2+y^2+z^2=r^2$ pour équation de la sphère, l'élimination de z donnera :

$$\left(\frac{x}{\sin a}\right)^2+\left(\frac{y}{\sin b}\right)^2=r^2. \qquad (2)$$

Telle est l'équation de la projection de l'ellipse sphérique en coordonnées rectilignes sur le plan xy.

Parmi les divers moyens pour déterminer un point sur la surface sphérique, un des plus simples est de prendre deux grands cercles perpendiculaires entre eux, mX et mY; du point M de la surface on mène sur ces cercles les arcs perpendiculaires MP, MQ qui rencontrent mX en P; soit $mP=r^2x_1$ et MQ, qui rencontre mY en Q; soit $mQ=ry_1$. D'ailleurs on voit de suite qu'on a $\tang x_1=\frac{x}{z}$, $\tang y_1=\frac{y}{z}$, d'où, au moyen de $\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+1=\left(\frac{r}{z}\right)^2$,

$$\frac{z}{r}=\frac{1}{\sqrt{\tan^2 x_1+\tan^2 y_1+1}},\quad \frac{y}{r}=\frac{\tan y_1}{\sqrt{\tan^2 x_1+\tan^2 y_1+1}},$$

$$\frac{x}{r}=\frac{\tan x_1}{\sqrt{\tan^2 x_1+\tan^2 y_1+1}};$$

l'équation (2) devient donc :

$$\left(\frac{\tan x_1}{\tan a}\right)^2+\left(\frac{\tan y_1}{\tan b}\right)^2=1. \qquad (3)$$

Telle est l'équation en coordonnées sphérique, indiquée à la page 54 de ce volume.

(4) *Cône supplémentaire.* Si par le sommet d'un cône de second degré on mène des perpendiculaires aux plans tangents, on a un nouveau cône du second degré, et si l'équation du premier est $\cot^2 ax^2+\cot^2 by^2-z^2=0$, celle du second est $\tan^2 ax^2+\tan^2 by^2-z^2=0$, d'où l'on concluera que le premier cône est supplémentaire du second.

Coupons le cône $\cot^2 ax^2+\cot^2 bx^2-z^2=0$ par le plan $z=px+qy$, il viendra

$$(\cot^2 a-p^2)x^2-2pqxy+(\cot^2 b-q^2)y^2=0;$$

le plan sera tangent si l'équation précédente ne représente qu'une droite, ou si son premier membre est un carré; il faut pour cela avoir $\cot^2 a.\cot^2 b-p^2\cot^2 b-q^2\cot^2 a=0$. La perpendiculaire au plan a pour équations $x+pz=0$, $y+qz=0$, l'élimination de p et q donne donc :

$$z^2\cot^2 a\cot^2 b-x^2\cot^2 b-y^2\cot^2 a=0,$$

ou $$x^2\tan^2 a+y^2\tan^2 b-z^2=0.$$

Le cône supplémentaire détermine sur la sphère l'ellipse supplémentaire; on voit donc qu'étant donnée l'ellipse sphérique d'équation (3), l'ellipse supplémentaire a pour équation $\left(\frac{\tan x_1}{\cot a}\right)^2+\left(\frac{\tan y_1}{\cot b}\right)^2=1$. (4) D'après la construction du cône supplémentaire, on voit que l'ellipse sup plémentaire est le lieu des pôles des arcs de grands cercles tangents à l'ellipse primitive. (V. *Annales*, p. 56.)

(5) Si l'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'axe des y, de sorte que l'axe des x' vienne s'appliquer sur une ligne focale, en posant $x=x'\sin c'-z'\cos c$, $z=x'\cos c+z'\sin c$, l'équation du cône $\cot^2 a x^2+\cot^2 b y^2-z^2=0$ deviendra :

$$y^2+z'^2=\left(x.\frac{\tang^2 b}{\tang a}+z\frac{\sin c}{\sin a\cos b}\right)^2=\left(\frac{z\sin c+x\cos c\sin^2 b}{\sin a\cos b}\right)^2;$$

d'où ce théorème : « Les plans perpendiculaires aux lignes » focales d'un cône le coupent suivant des ellipses dont un » foyer est sur la ligne focale. »

De même, si l'on fait tourner les trois axes autour de l'axe des x de manière que l'axe des y vienne s'appliquer sur une ligne focale du cône supplémentaire, en posant :

$$y=y'\sin c_1-z'\cos c_1 \quad z=y'\cos c_1+z'\sin c_1$$

et
$$\cos^2 c_1=\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a},$$

l'équation du cône $\cot^2 a x^2+\cos^2 b y^2-z^2=0$ deviendra :

$$x^2+\left(z'-\frac{\tang c_1}{\cos^2 a}\right)^2=\left(\frac{y'\cot b}{\cot^2 a}\right)^2.$$

De là ce théorème : « Un cône est coupé suivant des cercles » par les plans perpendiculaires aux lignes focales du cône » supplémentaire. Autrement : Si deux cônes sont supplé- » mentaires, les sections circulaires de l'un sont perpendicu- » laires aux lignes focales de l'autre.

Il est à remarquer que les lignes focales du cône supplémentaire $\tang^2 a x^2+\tang^2 b y^2-z^2=0$ sont dans le plan zOy et font avec l'axe des z un angle c_1 donné par l'équation

$$\cos^2 c_1=\frac{\sin^2 b}{\sin^2 a}.$$

D'ailleurs, si l'on représente par I l'inclinaison des secteurs circulaires du cône $\cot^2 a x^2 + \cot^2 b y^2 - z^2 = 0$ sur le plan zOx, on a $\cos^2 c_1 = \sin^2 I = \dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 a} = \sin^2 B$, en représentant par B l'angle opposé au côté b dans le triangle sphérique rectangle dont les côtés sont a, b, c. « Ainsi l'angle des deux sections » circulaires symétriques par rapport au plan de ses lignes fo- » cales, est égal à l'angle formé par les plans qui passent par » une ligne focale et les génératrices opposées de la section » principale minimum. » De là cette construction : Divisez en deux parties égales l'angle d'une ligne focale et d'une droite AA′, les points A, A′, étant sur les lignes focales et à égales distances du sommet, ou sur une parallèle à l'axe des x. Le plan mené par la bissectrice perpendiculairement à celui des lignes focales ira couper en B et B′ les deux génératrices qui forment la section principale minimum et les plans AA′B, AA′B′ seront deux sections circulaires symétriques par rapport au plan des lignes focales.

C'est dans les mémoires de M. Chasles, et notamment dans le mémoire de géométrie pure sur les propriétés des cônes du second degré, que l'on trouvera de nombrenses conséquences des propositions précédentes.

Problème. Discuter la courbe, intersection d'une sphère et d'une ellipsoïde de révolution autour de la ligne de ses foyers supposés sur la sphère. C'est une sorte d'ellipse sphérique décrite par un fil attaché en deux points de la surface, mais intérieurs à la sphère. Quand le fil est extérieur, on a l'ellipse sphérique dont il a été question plus haut.