NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Note sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 14-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__14_1>

NOTE

sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique.

PAR M. VANNSON, professeur (Versailles).

1. On trouve (tome V, page 17) un article de M. Terquem contenant la proposition suivante : Si on joint les milieux m, n de deux côtés d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 1), qu'à partir du point R, où l'arc mn rencontre le côté

(*) Même question pour la circonference.

opposé, on prenne RI$=mn$, qu'on achève le triangle rectangle IKR, IK sera le $\frac{1}{2}$ excès. Nous remarquerons d'abord comme corollaire que si on mène un arc perpendiculaire au milieu de BC, l'arc pq sera la mesure de l'angle R ; on aura donc, en appelant S la surface du triangle sphérique :

$$\sin\frac{S}{2}=\sin mn\times\sin pq.$$

Ainsi le sinus de la moitié de la surface d'un triangle sphérique est égal au sinus de l'arc qui joint les milieux de deux côtés, multiplié par le sinus de l'arc élevé perpendiculairement au milieu de la base jusqu'à la rencontre de celui qui joint les deux milieux.

Si dans cette formule on suppose que le rayon de la sphère devienne infini, en conservant aux côtés du triangle des longueurs finies, on devra trouver pour limite la surface du triangle rectiligne. Pour parvenir à ce résultat, je suppose que S représente la longueur de l'arc 2IK, rayon 1. Le rapport de S au quadrant sera donc $\frac{2S}{\pi}$; ce sera en même temps le rapport du triangle proposé au triangle trirectangle. Or ce dernier triangle a pour mesure $\frac{\pi R^2}{2}$, donc la surface du triangle donné sera représentée par SR^2 ; je désigne ce produit par Σ ; j'aurai donc $S=\frac{\Sigma}{R^2}$; je désigne par b et h les longueurs des arcs mn et pq. Pour le rayon R, les arcs semblables à ceux-là pour le rayon 1 seront représentés par $\frac{b}{R}$ et $\frac{h}{R}$. Nous aurons donc pour une valeur quelconque de R l'équation $\sin\frac{\Sigma}{2R^2}=\sin\frac{b}{R}\sin\frac{h}{R}$. On peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\Sigma \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Sigma}{2R^2}\right)}{\left(\frac{\Sigma}{2R^2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{b}{R}\right)}{\left(\frac{b}{R}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{R}\right)}{\left(\frac{h}{R}\right)} \cdot bh.$$

Si maintenant on suppose R infini, on aura $\Sigma = 2bh$, ce qu'il fallait trouver.

II. On peut, en partant du même principe, démontrer sans le secours du calcul cette formule que donne Legendre :

$$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Pour cela, soit ABC (*fig.* 2) un triangle, oD une perpendiculaire menée à son plan par le centre du cercle circonscrit; concevons une sphère ayant son centre en D, et soit A'B'C' la projection centrale du triangle ABC sur cette sphère, m', n' les projections des points M et N, milieux de AB et de AC; cherchons le volume de la pyramide DABC; elle équivaut évidemment à quatre fois la pyramide DMNA; or cette dernière a pour mesure le triangle DMN, multiplié par le $\frac{1}{3}$ d'une perpendiculaire abaissée du point A sur le plan DMN; mais le triangle

$$\text{DMN} = \frac{\text{DM.DN}\sin m'n'}{2} = \frac{\text{DA.}^2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\text{M'N'}}{2},$$

et la perpendiculaire abaissée du point H sur le plan

$$\text{DMN} = \text{DA.}\sin\text{R} = \text{DA.}\cos\frac{a}{2}\sin\text{R};$$

donc $\quad \text{V} = \frac{2\text{DA.}^3}{3}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin m'n'\sin\text{R};$

mais $$\sin m'n' \sin R = \sin \frac{S}{2};$$

donc $$V = \frac{2DA^3}{3} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \sin\frac{S}{2}.$$

Mais on connaît une autre expression de ce même volume, savoir :

$$\frac{DA^3}{3} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c};$$

donc $$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}}.$$

Remarque. Si on divise cette équation membre à membre par celle qui donne

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)},$$

on trouvera

$$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin A}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Quand on fait $r = \infty$, on retrouve la formule

$$S = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Cette dernière formule

$$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin A}{\cos\frac{a}{2}},$$

peut aussi se démontrer par la méthode des projections centrales. En effet, si on se reporte à la figure précédente, on voit que le volume de la pyramide a encore pour mesure le triangle ABD multiplié par le $\frac{1}{3}$ de la hauteur du point C au-dessus du plan de ce triangle. Or le triangle

$$\mathrm{ABD} = \frac{\mathrm{AD}^2 \sin c}{2}$$

et la hauteur $= \mathrm{AD} \sin b \sin \mathrm{A}$; donc

$$\mathrm{D} = \frac{1}{6}\, \mathrm{AD}^3 \sin c \sin b \sin \mathrm{A}\,;$$

mais déjà

$$\mathrm{V} = \frac{2\mathrm{DA}^3}{3} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \sin\frac{\mathrm{S}}{2};$$

donc
$$\frac{\mathrm{S}}{2} = \frac{\sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin \mathrm{A}}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Si on appelle h la hauteur du triangle tombant sur le côté c, on aura $\sin \mathrm{A} = \frac{\sin h}{\sin b}$;

d'où
$$\sin\frac{\mathrm{S}}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2} \sin h}{2\cos\frac{b}{2} \cos\frac{a}{2}}.$$

III. On démontre dans la géométrie plane que le produit des trois côtés d'un triangle $=$ 4 fois sa surface par le rayon du cercle circonscrit. Nous allons chercher le théorème analogue dans le triangle sphérique, à l'aide de la construction ci-dessus employée.

Le volume de la pyramide DABC est égal à $\frac{\widehat{\mathrm{ABC}}.\mathrm{D}o}{3}$; mais si on prend DA pour unité et qu'on désigne par ρ la distance polaire du cercle circonscrit au triangle A'B'C', on aura $\mathrm{D}o = \sin\rho$, donc

$$V = \frac{\widehat{ABC}.\sin\rho}{3};$$

mais déjà on a trouvé

$$V = \frac{2}{3}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{S}{2};$$

donc $$\widehat{ABC} = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\frac{S}{2}}{\sin\rho};$$

donc l'équation $AB.AC.BC = 2.D.\widehat{ABC}$, devient en y remplaçant $\widehat{ABC}$ par cette valeur et AB... par $2\sin\frac{c}{2}$, etc....

$$2\operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \operatorname{tang}\rho.\sin\frac{S}{2},$$

d'où, en ayant égard à la valeur trouvée pour $\sin\frac{S}{2}$, on tire :

$$\operatorname{tang}\rho = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

On aurait encore pu remplacer $\sin\frac{S}{2}$ par

$$\frac{\sin\frac{c}{2}\sin h}{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}};$$

alors on aurait eu

$$2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\operatorname{tang}\rho\,\sin h\cos\frac{c}{2};$$

si on fait $r = \infty$, on retrouve le théorème : Le produit de deux côtés d'un triangle égale le diamètre du cercle circonscrit, multiplié par la hauteur relative au 3[e] côté.

IV. *Problème*. Connaissant les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver les distances polaires des cercles inscrits et ex-inscrits.

Soit O, *fig.* 3, le pôle du cercle inscrit, r sa distance polaire, on a dans le triangle rectangle AOC′ :

$$\tan r \sin AC'.\tan\frac{A}{2};$$

mais AC′ est égal à $p-a$; p désignant le $\frac{1}{2}$ périmètre et

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}};$$

on a donc

$$\tan r=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)\sin p-a)}{\sin p}}.$$

On trouve des formules analogues pour les rayons des cercles ex-inscrits $r'r''r'''$, et par suite, on a la relation

$$\tan r.\tan r'.\tan r''\tan r'''=$$
$$=\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

et

$$\tan r:\tan r':\tan r':\tan r'''::$$
$$::\frac{1}{\sin p}:\frac{1}{\sin(p-a}:\frac{1}{\sin(p-b)}:\frac{1}{\sin(p-c)};$$

mais on peut remplacer le produit simplifié

$$\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$$

par

$$4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{S}{2};$$

on aura donc

$$\tan\rho.\tan\rho'.\tan\rho''.\tan\rho'''=$$
$$=4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{S}{2}.$$

Enfin, ou par une des formules ci-dessus démontrées

$$\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}=\frac{\sin a\sin h}{2};$$

donc $$\operatorname{tang} r.\operatorname{tang} r'.\operatorname{tang} r''.\operatorname{tang}''' = \frac{\sin^2 a \sin^2 h}{4}.$$

C'est-à-dire que le produit des tangentes des distances polaires des cercles inscrits et ex-inscrits est égal au demi-produit du sinus de la base par le sinus de la hauteur, élevé au carré.

(*La suite prochainement.*)