Nouvelles annales de mathématiques

Borgnet

Sur la géométrie sphérique analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 147-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__147_1>

SUR LA GEOMÉTRIE SPHÉRIQUE ANALYTIQUE.

PAR M. BORGNET,
professeur de mathematiques au lycée de Tours (*).

Les *Nouvelles Annales* mentionnent (page 475, 1847) la présentation que j'ai faite à l'Académie des sciences d'un essai de géométrie sphérique, à la date du 15 novembre 1847, et annonçant que mon mémoire a été renvoyé à l'examen d'une commission composée de MM. Cauchy, Poncelet et Liouville.

J'attendais le rapport des commissaires, lorsque votre numéro de février, que je viens de recevoir, m'a fait connaître les recherches de M. Vannson sur le même sujet. Le système de coordonnées employé par M. Vannson est celui que j'ai moi-même employé dans mon mémoire. Cette coïncidence me détermine à vous adresser quelques détails sur

(1) Je rappelle derechef que l'Allemagne possède depuis 1835 un traite *ex professo* sur la sphero-géométrie analytique dans le système des coordonnees sphériques. L'auteur, M. Gudermann, annonçait même une traduction française Je ne sache pas qu'elle ait paru. Tm

les époques auxquelles j'ai donné connaissance de mon travail, et sur les matières qui y sont traitées.

Le 12 juin 1847, j'ai déposé ce travail dans les archives de la Société d'agriculture, sciences, etc , du département d'Indre-et-Loire, afin d'assurer mes droits à la priorité dans des recherches qui me paraissaient intéressantes et que je croyais neuves.

Pendant la session du congrès scientifique qui s'est ouvert à Tours le 15 septembre 1847, j'ai eu occasion d'exposer les principes dont je faisais usage dans la résolution des problèmes de géométrie sphérique.

Enfin, mon essai de géométrie analytique de la sphère a été présenté à l'Académie des sciences dans la séance du 15 novembre 1847.

Voici maintenant l'analyse de cet essai.

§ 1. *Préliminaires.*

Dans un court résumé, je donne l'historique de la géométrie de la sphère. Je fais remarquer l'absence d'uniformité dans la marche suivie jusqu'ici pour traiter les questions relatives à cette partie de la science de l'étendue. Le système des coordonnées de Descartes réunit bien ces caractères d'uniformité, mais il ne permet d'étudier les courbes sphériques que par leurs projections. Les projections étant, dans le système de Descartes, des intermédiaires obligés entre la courbe étudiée et l'esprit qui l'étudie, présentent souvent des obstacles à l'investigation.

Cet inconvénient disparaît quand on rapporte les points de la sphère à deux grands cercles : l'une des coordonnées est la longitude du point ; l'autre coordonnée est, non pas sa latitude, mais une distance qui, comptée sur le premier méridien, se trouve dans les mêmes conditions que la longitude comptée sur l'équateur.

Ce choix de coordonnées permet de partager les lignes sphériques en deux classes; les lignes dont les équations ne renferment que les tangentes trigonométriques des coordonnées, ce sont les lignes algébriques. Toutes les autres lignes sont appelées transcendantes.

Les lignes algébriques sont distribuées en lignes de différents ordres, suivant le degré de leur équation.

Les lignes transcendantes ne sont soumises à aucune classification.

Toute équation algébrique du premier degré représente un grand cercle, c'est-à-dire l'intersection de la sphère par un plan conduit par le centre.

Toute équation algébrique du deuxième degré représente une conique sphérique, c'est-à-dire l'intersection de la sphère par un cône du second degré dont le sommet est au centre.

En général, toute ligne algébrique de l'ordre n résulte de l'intersection de la sphère par un cône ayant son sommet au centre, et dont l'équation, en coordonnées rectilignes, est du degré n.

Cette première partie se termine par des formules pour le changement de coordonnées.

§ 2. *Examen particulier des lignes du premier ordre.*

Équation du grand cercle assujetti à deux conditions, comme de passer par deux points de la sphère, d'avoir pour pôle un point déterminé de cette surface, de passer par un point et de couper un autre grand cercle sous un angle donné, etc., etc.

Angle de deux grands cercles donnés par leurs équations.

§ 3. *Du petit cercle.*

C'est une ligne du deuxième ordre; son équation au moyen de son pôle et de son rayon polaire; angle de deux petits cercles donnés par leurs équations; axe radical de deux petits cercles ; centre de similitude ; centre radical de trois petits cercles ; usage des propriétés des centres radicaux et des centres de similitude, pour déterminer un cercle par trois conditions.

En terminant cette troisième partie, j'ai occasion de remarquer cette belle propriété de géométrie sphérique : si d'un point de la sphère, extérieure à un petit cercle, on mène deux arcs sécants à ce petit cercle, les tangentes trigonométriques de la moitié de ces sécantes sont réciproquement proportionnelles aux tangentes de la moitié de leurs parties extérieures. Propriété analogue pour le cas où le point est intérieur au petit cercle. (*La fin prochainement.*)