NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STREBOR

Théorèmes de géométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 135-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__135_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

PAR M. STREBOR.

Une ellipse sphérique, dont les demi-axes a et b sont liés par la relation

$$\sin a = \operatorname{tang} b,$$

considérée par rapport au centre extérieur, situé sur le prolongement de son grand axe $2a$, jouit des analogies les plus frappantes avec l'hyperbole équilatère. En appelant la sphéro-conique dont il s'agit l'hyperbole équilatère sphérique, on aura les théorèmes suivants, qui vont mettre en évidence la justesse de cette dénomination. Le complément (α) de a est évidemment analogue au demi-axe réel de l'hyperbole.

On sait que dans une hyperbole équilatère le rayon central de chaque point de la courbe est moyen proportionnel entre les deux rayons vecteurs de ce point, tirés des foyers. Semblablement :

I. Dans l'hyperbole équilatère sphérique, si l'on mène des arcs de grands cercles des foyers contigus des branches opposées à un point quelconque pris sur la courbe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs sera égal au carré de la tangente du demi-arc, tiré du centre à ce point.

Dans une hyperbole équilatère, la distance du centre à une tangente quelconque, multipliée par la distance du centre au point de contact correspondant, donne un produit constant, le carré du demi-axe de la courbe. Semblablement :

II. Dans une hyperbole équilatère sphérique, si l'on désigne par ω l'arc mené du centre, perpendiculairement au grand cercle, tangent à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque ρ, tiré du centre, on aura

$$\sin\omega \operatorname{tang}\rho = \sin a \operatorname{tang}\alpha.$$

III. L'hyperbole équilatère sphérique est lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée et dont la différence des angles à la base est constante.

On sait qu'un système d'ellipses de Cassini, ayant les mêmes foyers, est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères, ayant le même centre que les cassinoïdes et passant par les foyers. Semblablement, en prenant pour définition de cassinoïde sphérique le lieu d'un point tel que le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs, qu'on tire de là à deux points fixes, soit constant, on a le théorème.

IV. Un système de cassinoïdes sphériques ayant les mêmes foyers sera coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères sphériques, ayant même centre que les cassinoïdes et passant par les foyers.

La courbe, lieu des points pris sur des grands cercles, menés du centre d'une hyperbole équilatère sphérique, perpendiculairement à ses tangentes, de manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes, offre les analogies les plus remarquables avec la lemniscate de Bernoulli, qu'on tire d'après une méthode pareille d'une hyperbole équilatère plane. En effet (en appelant la courbe qu'on obtient par cette construction la sphéro-lemniscate),

V. La sphéro-lemniscate coïncide avec le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée et dont le produit des sinus des demi-côtés est constant, et égal au carré du sinus de la quatrième partie de la base.

VI. La base du triangle dont on vient de parler, est la distance entre les foyers contigus des branches opposées de l'hyperbole équilatère sphérique, de laquelle la sphéro-lemniscate est dérivée.

VII. L'arc de la sphéro-lemniscate s'exprime exactement par une fonction elliptique de première espèce, sans aucune addition.