LEGALLAIS

Solution de la question 177

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 126-134
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__126_2>

SOLUTION DE LA QUESTION 177.

PAR M. LEGALLAIS,
Elève du Collége militaire de La Flèche.

Donner une discussion complète du lieu géométrique d'un *point tel, que si de là l'on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés, leur rectangle soit constant.* (Strebor.)

Commençons par chercher l'équation générale, sans faire d'abord aucune hypothèse sur les données qui sont le rayon R, la distance des centres d, et la valeur m^2 du rectangle des tangentes.

Comme tout est évidemment symétrique autour de la ligne des centres OO' (*fig.* 18) et de même autour de la perpendiculaire CY menée au milieu C de OO', je prends ces deux droites pour axes de coordonnées.

Cela posé, soit m un point du lieu. Je mène de ce point la tangente mR au cercle (OR) et la tangente mR' au cercle (OR').

La condition du lieu est que $mR.mR' = R^2$. De là je déduis

$mR^2.mR'^2 = m^4$, ou $(\overline{Om}^2 - \overline{OR}^2)(\overline{O'm}^2 - \overline{O'R'}^2) = m^4$,

$$\text{ou } \left[y^2 + (x + \tfrac{1}{2}d)^2 - R^2\right]\left[y^2 + (x - \tfrac{1}{2}d)^2 - R^2\right] = m^4:$$

ou, réduisant les termes semblables, et ordonnant par rapport à y, $y^4 + \left(2x^2 - 2R^2 + \frac{1}{2}d^2\right)y^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}d^2\right)^2 -$

$$- R^2\left(2x^2 + \frac{1}{2}d^2\right) + R^4 - m^4 = 0.$$

Résolvant, et effectuant sous le radical toutes les réductions, j'obtiens définitivement :

$$y^2 = \left(R^2 - \frac{1}{4}d^2\right) - x^2 \pm \sqrt{d^2x^2 + m^4}.$$

La forme de cette équation indique tout d'abord la symétrie parfaite que la géométrie nous a déjà fait reconnaître par rapport aux deux axes coordonnées. Puis, $d^2x^2 + m^4$ étant toujours positif, quelle que soit la valeur de x, la discussion relative aux conditions de réalité de y doit porter sur la valeur et sur le signe du terme $R^2-\frac{1}{4}d^2$.

La géométrie et l'algèbre se trouvent donc ici parfaitement d'accord relativement aux points à discuter.

Le cas où les cercles sont extérieurs sans se toucher se traduira par $d>2R$, ou $R^2-\frac{1}{4}d^2<0$; le cas où ils sont tangents extérieurement par $d=2R$, ou $R^2-\frac{1}{4}d^2=0$; le cas où ils se coupent par $d<2R$, ou $R^2-\frac{1}{4}d^2>0$; celui où ils sont tangents intérieurement par $d=0$. Enfin, il y aura à examiner le cas singulier où chaque cercle se réduit à un point, c'est-à-dire $R=0$.

Ainsi, voilà les hypothèses que nous allons examiner successivement, en commençant par les plus remarquables :

$$R=0,\ d=0,\ d<2R,\ d=2R,\ d>2R.$$

Premier cas.

$R=0$. Les deux cercles se réduisent alors à leurs centres, et par suite les tangentes se confondent avec $\overline{Om}$ et $O'm$ (*fig.* 18). Le lieu demandé devient donc le lieu géométrique des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes soit constant.

C'est la courbe connue sous le nom d'ovale ou ellipse de Cassini. Son équation, facile à obtenir directement, et qui se déduit de l'équation générale trouvée plus haut en y faisant $R=0$, et posant, pour simplifier $\frac{d}{2}=D$, est

$$y^2=-(x^2+D^2)+\sqrt{4D^2x^2+m^4},$$

le signe — du radical ayant dû évidemment être écarté, comme ne donnant aucune valeur réelle de y.

Pour que y soit réel, il faut que x^2+D^2 soit $<\sqrt{4D^2x^2+m^4}$, ou $x^4 - 2D^2x^2 + D^4 - m^4 < 0$. Ainsi, x^2 doit être compris entre les racines de l'équation $x^4 - 2D^2x^2 + D^4 - m^4 = 0$, qui sont $x_{\prime}^2 = D^2 + m^2$, $x_{\prime\prime}^2 = D^2 - m^2$.

Dans tous les cas, on voit que la courbe est limitée en tous sens; mais il y a évidemment, pour connaître la forme exacte, à examiner successivement les hypothèses $D < m$, $D = m$, $D > m$.

Pour $D < m$, il n'y a à adopter que la limite $x_{\prime}^2 = D^2 + m^2$; la seconde, étant négative, doit être rejetée. La courbe ne rencontre l'axe des x qu'en deux points situés de part et d'autre de l'origine à une distance égale à $\sqrt{D^2 + m^2}$; elle a pour centre l'origine et offre d'ailleurs une grande ressemblance avec l'ellipse.

Pour $D > m$, les deux limites sont convenables; il y a avec l'axe des x quatre points de rencontre déterminés par les abscisses $x' = \pm\sqrt{D^2 + m^2}$, $x'' = \pm\sqrt{D^2 - m^2}$; la courbe n'existe pas dans l'intervalle des deux points x'' ni en dehors de l'intervalle des deux points x'. Elle est composée de deux courbes ovales égales, symétriquement placées par rapport au centre.

Pour $D = m$, x'' devient 0, les deux courbes ovales viennent se réunir en passant toutes deux par l'origine, qui continue d'être un centre. Je ne m'étendrai pas plus long-temps sur cette courbe, qui est assez connue.

Second cas.

$d = 0$. Les deux cercles se réduisent à un seul, et la question devient celle-ci :

Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à un cercle une tangente d'une longueur donnée m.

L'inspection seule de la figure (*fig.* 18) montre que si $\overline{mR}$ est constant, *om* doit l'être aussi, et que, par conséquent, le lieu cherché est une circonférence de cercle ayant o pour centre et $\sqrt{R^2+m^2}$ pour rayon.

L'équation trouvée ci-dessus devient, sous l'hypothèse $d=0$,

$$x^2+y^2=R^2\pm m^2.$$

En prenant le signe $+$, on a précisément le cercle qu'indique la géométrie.

Le signe $-$, qui indiquerait des points situés en dedans du cercle primitif si R est $>m$, un seul point si $R=m$, un lieu imaginaire si R est $<m$, doit évidemment être rejeté (*).

Après cette rapide discussion de deux cas singuliers, rentrons maintenant dans la véritable question, et examinons-la sous trois hypothèses différentes.

Troisième cas (fig. 19).

Les deux cercles se coupent. L'axe des y est la droite qui joint les deux points communs H et H' (*fig.* 19); $R^2-\frac{1}{4}d^2$ est >0, et représente le carré de l'ordonnée CH que, pour abréger, nous désignerons par h. L'équation est donc

$$y^2=h^2-x^2\pm\sqrt{d^2x^2+m^4}. \qquad (1)$$

Prenons d'abord le radical avec le signe $+$.

Pour que y soit réel, il faut que $\sqrt{d^2x^2+m^4}$ soit $>x^2-h^2$, ou $d^2x^2+m^4>x^4-2h^2x^2+h^4$.

Les limites entre lesquelles il faut prendre x^2 sont fournies par l'équation

$$x^4-(2h^2+d^2)\,x^2+h^4-m^4=0,$$

et sera par conséquent :

(*) Ce cas est susceptible d'une interprétation géométrique. Tm.

$$x_{\prime}^{2}=h^{2}+\frac{d^{2}}{2}+\sqrt{m^{4}+d^{2}h^{2}+\frac{d^{4}}{4}},$$

$$x_{\prime\prime}^{2}=h^{2}+\frac{d^{2}}{2}-\sqrt{m^{4}+d^{2}h^{2}+\frac{d^{4}}{4}}.$$

Suivant qu'on a $m^2 < h^2$, $m^2 = h^2$, $m^2 > h^2$, le radical est $<$ que la quantité qui le précède, égal à cette quantité, plus grand que cette quantité.

Fig. 20. 1° Soit $m^2 < h^2$. Alors les deux limites conviennent : la courbe rencontre l'axe des x en quatre points correspondants aux abscisses $x_{\prime}$ et $x_{\prime\prime}$. Donc, en prenant, pour représenter les valeurs $x_{\prime}$ les deux distances OQ′ et OQ″, pour représenter les valeurs $x_{\prime\prime}$ les distances OP′ et OP″ (*fig*. 20), la courbe est composée de deux parties égales, fermées, symétriquement placées par rapport au centre, et comprises, l'une entre les parallèles à l'axe des y menées par les points $P_{\prime}$ et $Q_{\prime}$, l'autre entre les parallèles au même axe menées par les points $P_{\prime\prime}$ et $Q_{\prime\prime}$. Dans chacune d'elles on découvrira facilement les points pour lesquels l'ordonnée est maximum en valeurs absolues, et qui correspondent au milieu des intervalles P′Q′ et $P_{\prime\prime}Q_{\prime\prime}$. Ce sont deux courbes ovales pareilles à celles de la courbe de Cassini quand D est $> m$; elles sont tangentes aux parallèles à l'axe des y aux points où elles rencontrent l'axe des x.

2° Quand m^2 devient égal à h^2, il semble qu'il doive arriver ici, comme pour la courbe de Cassini, que les deux lignes ovales viennent se réunir en passant par le centre. C'est ce que semble en effet indiquer l'algèbre, en donnant $x_{\prime\prime}^2 = 0$ avec $x_{\prime}^2 = 2h^2 + d^2$, pour abscisses des points de rencontre avec l'axe des x. Cependant la figure montre que ni ce point ni aucun des points voisins ne sauraient convenir à la question. Nous allons voir qu'en effet la courbe ne passe nullement à l'origine, qui est tout simplement un point isolé, et, de plus, que, si l'on décrit une ellipse ayant pour centre C, pour grand axe $2\sqrt{2h^2+d^2}$, et pour petit axe $2\sqrt{2h^2}$, ces axes étant d'ailleurs comptés sur les lignes CX et CY, la courbe actuelle est *le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de cette ellipse sur toutes ses tangentes.* Démontrons d'abord cette dernière partie.

Soit $A^2y^2+B^2x^2=A^2B^2$, l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes; $A^2y_1y+B^2x_1x=A^2B^2$ est l'équation d'une tangente, et $y=\frac{A^2y_1}{B^2x_1}x$ celle de la perpendiculaire menée du centre sur cette tangente.

De ces deux dernières équations on tire :

$$x_1=\frac{A^2x}{x^2+y^2},\qquad y_1=\frac{B^2y}{x^2+y^2};$$

et, portant ces valeurs dans $A^2y_1^2+B^2x_1^2=A^2B^2$, équation de condition pour que le point (x_1y_1) appartienne à l'ellipse, on obtient facilement pour equation du lieu des projections du centre sur les tangentes

$$A^2x^2+B^2y^2=(x^2+y^2)^2. \qquad (2)$$

Or, en faisant $m^2=h^2$ dans l'équation du lieu que nous discutons ici, isolant le radical et élevant au carré, on a l'équation

$$(2h^2+d^2)x^2+2h^2y^2=(x^2+y^2)^2. \qquad (3)$$

Pour la rendre identique avec l'équation (2), il suffit de faire, comme nous l'avons déjà dit, $B=h\sqrt{2}$, $A=\sqrt{2h^2+d^2}$, valeurs très-faciles à construire géométriquement. L'ellipse est donc parfaitement déterminée. Si l'on veut exprimer les axes en fonction de rayon, on n'a qu'à remplacer h par $\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}$. On obtient ainsi :

$$A^2=2R+\frac{d^2}{2},\qquad B^2=2R^2-\frac{d^2}{2}.$$

On en tire $A^2 + B^2 = 2R^2$, $A^2 - B^2 = d^2$. D'après ces dernières formules, on voit que la distance des centres des deux cercles est égale à la demi-excentricité de l'ellipse, et qu'il sera très-facile de décrire les deux cercles quand l'ellipse sera donnée, de même qu'il l'a été de décrire l'ellipse d'après les deux cercles.

Voyons maintenant la forme de ce lieu qui jouit d'une double propriété si remarquable (*fig.* 21).

Son équation est $y^2 = h^2 - x^2 + \sqrt{d^2x^2 + h^4}$. Nous savons déjà qu'elle est limitée et comprise entre deux parallèles à l'axe des y menées aux distances $x' = \pm\sqrt{2h^2 + d^2} = \pm A$.

Si nous faisons $x = 0$, il vient $y = \pm h\sqrt{2} = \pm B$.

On retrouve ainsi pour points de rencontre avec les axes les quatre sommets $A_{\prime}$, $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime}$, $B_{\prime\prime}$ (*fig.* 5) de l'ellipse, qui sont quatre points situés hors de la courbe.

Quand x augmente, on ne voit pas bien d'abord ce que devient y. Pour avoir des renseignements plus précis, cherchons l'équation de la tangente; et, pour cela, prenons l'équation (3), qui peut se mettre sous la forme

$$F(x, y) = y^4 + 2(x^2 - h^2)y^2 + x^4 - (2h^2 + d^2)x^2. \quad (4)$$

De là l'on tire le coefficient angulaire de la tangente

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{F'(x)}{F'(y)} = -\frac{4x^3 + (4y^2 - 4h^2 - 2d^2)x}{4y^3 + 4(x^2 - h^2)y}.$$

On voit d'abord que, pour $y = 0$, $\operatorname{tang}\alpha = \infty$, c'est-à-dire qu'aux points $A_{\prime}$ et $A_{\prime\prime}$ la courbe est tangente aux parallèles à l'axe des y, et il est facile de s'assurer que cela n'arrivera en aucun autre point.

Cherchons maintenant les points où la tangente est parallèle à l'axe des x. Pour ces points on a :

$$2x^3 + (2y^2 - 2h^2 - d^2)x = 0.$$

Cela donne d'abord $x=0$, ce qui détermine les points $B_{\prime}$ et $B_{\prime\prime}$; puis $x^2=h^2+\frac{d^2}{2}-y^2$, ce qui indique deux autres points correspondant à des abscisses égales de part et d'autre du centre, et à des ordonnées qui restent à déterminer. Or, en portant cette valeur de x^2 dans l'équation $F(x,y)=0$ (4), on trouve à accoupler pour les points où la tangente est parallèle à l'axe des x :

$$y^2=\frac{(2h^2+d^2)^2}{4d^2}, \qquad x^2=\frac{(d^2+2h^2)(d^2-2h^2)}{4d^2}.$$

Or $d^2-2h^2=\frac{3d^2-4R^2}{2}$, si $4R^2<d^2$ on a la figure 21 et dans les deux autres cas, la figure 22.

3° $m^2>h^2$. Alors il n'y a évidemment que deux points de rencontre avec l'axe des x, et la courbe est tout entière comprise entre les parallèles à l'axe des y menées par ces points. En continuant la discussion, on repasse par les mêmes alternatives et on arrive définitivement à la même forme de courbe que pour $m^2=h^2$.

4° Il reste à examiner l'équation (1) en prenant $y^2=h^2-x^2-\sqrt{d^2x^2+m^4}$. Pour m^2 supérieur ou égal à h^2, y est imaginaire, il n'y a pas de lieu géométrique. Pour $m^2<h^2$, on trouvera, comme il est facile de le vérifier, un lieu illimité dont les points les plus rapprochés des cercles en sont trop éloignés pour convenir à la question géométrique; ou une ligne ovale passant par les points de rencontre des deux cercles, comprise tout entière dans l'intérieur de la figure qu'ils déterminent, et ne donnant encore, par conséquent, aucune solution géométrique. (*La fin prochainement.*)