NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. G. J. JACOBI

Nouveaux théorèmes algébriques relatifs au système de deux équations entre deux variables

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 118-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__118_1>

NOUVEAUX THÉORÈMES ALGÉBRIQUES

relatifs au système de deux équations entre deux variables.

Par M. C. G. J. JACOBI, professeur ordinaire de mathématiques, à Kœnigsberg.
(Crelle, XIV, 281, 1835.)

—

I.

De tous les théorèmes qu'on donne dans les éléments d'algèbre, il en existe à peine un seul plus utile, principalement dans les équations, que le suivant :

« X étant une fonction rationnelle entière de x, on a

$$\Sigma\left(\frac{U}{\frac{dX}{dx}}\right)=0,$$

» si on étend la somme à toutes les racines de l'équation
» $X=0$, et si U est une autre fonction quelconque rationnelle
» et entière de x, d'un ordre inférieur de deux unités à la
» fonction X. »

Dans ce qui suit, nous démontrerons comment on étend ce théorème au système de deux équations algébriques entre deux variables. Soient f, φ des fonctions rationnelles entières de x et de y, qui montent respectivement au $\mu^{\text{ème}}$ et $\nu^{\text{ème}}$ degré. Supposons que w soit le degré des équations finales qui proviennent de l'élimination de l'une et de l'autre variable des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Soient ces équations finales :

$$X=0,\quad Y=0,$$

l'une en x et l'autre en y. Supposons de plus que M, N, P, Q soient les fonctions multiplicatrices, les plus simples, rationnelles, entières, au moyen desquelles on obtienne identiquement :

$$Mf+N\varphi=X,$$
$$Pf+Q\varphi=Y;$$

soit enfin $$MQ-NP=V,$$

nous désignerons par

$$[x^\alpha, y^\beta]$$

une fonction rationnelle entière en x et y dans laquelle x^α, y^β sont les plus hautes puissances de x, y qui se trouvent dans cette fonction, et soit

$$f=[x^\alpha, y^\beta],\quad \varphi=[x^\gamma, y^\delta].$$

On aura, d'après les principes algébriques connus :

$$M=[x^{w-\alpha}, y^{\delta-1}];\ N=[x^{w-\gamma}, y^{\beta-1}]$$
$$P=[x^{\gamma-1}, y^{w-\beta}];\ Q=[x^{\alpha-1}, y^{w-\delta}],$$

d'où $V=MQ-NP=[x^{w-1}, y^{w-1}]$.

Or M et P sont de degré $w-\mu$, et N, Q de degré $w-\nu$, donc V est de degré $2w-\mu-\nu$.

Supposons que $x=x_1$, $y=y_1$; $x=x_2$, $y=y_2$;..... $x=x_w$, $y=y_w$ soient les racines simultanées des équations

$$f=0,\ \varphi=0.$$

Toutes les fois que $x=x_m$, $y=y_n$, m n'étant pas égal à n, satisfait aux équations $X=Mf+N\varphi=0$; $Y=Pf+Q\varphi=0$, mais pas aux équations, $f=0$, $\varphi=0$ comme de ces équations, on déduit $Vf=0$; $V\varphi=0$; donc $V=0$.

« $V_{m,n}$ désignant la valeur que prend l'expression $MQ-NP$,
» en posant en même temps $x=x_m$, $y=y_n$, lorsque m et
» n seront différents, on aura $V_{m\,n}=0$, ou bien V s'éva-
» nouira pour toutes les racines des équations finales qui ne
» sont pas racines simultanées des équations proposées. »

Différentiant par rapport à x et à y les identités $Mf+N\varphi=X$; $Pf+Q\varphi=Y$, et mettant après la differentiation les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$, il vient:

$$Mf'(x)+N\varphi'(x)=X';\ Pf'(x)+Q\varphi'(x)=0,$$
$$Mf'(y)+N\varphi'(y)=0;\ Pf'(y)+Q\varphi'(y)=Y'.$$

Posons pour abréger :

$$f'(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)f'(y)=R:$$

il vient : $R.M=+X'\varphi'y$, $R.P=-Y'\varphi'(x)$,

$R.N=-X'f'y$, $R.Q=+Y'f'(y)$,

d'où $RV=X'Y'$.

Nous voyons donc qu'en substituant dans V les racines simultanées des équations, on obtient le même résultat que si l'on substitue ces valeurs dans l'expression $\dfrac{X'\,Y'}{R}$, ou désignant par X'_m, Y'_m, R_m les valeurs que prennent X', Y', R pour les racines simultanées x_m, y_m des équations $f=0$, $\varphi=0$, on obtient $V_{m,m}=\frac{X'_m.Y'_m}{R_m}$.

II.

Dans l'expression V, les variables x, y pris séparement montent, comme nous avons vu ci-dessus, au degré $w-1$, par conséquent à un degré moindre d'une unité que dans X et Y qui sont de degré w. On aura par la théorie de la décomposition des fractions rationnelles

$$\frac{V}{X.Y}=\Sigma\frac{V_{m,n}}{X'_m,\ Y'_n\ (x-x_m)(y-y_n)}.$$

La somme étant étendue à toutes les valeurs des indices m, n comprises dans la suite 1, 2, 3..... w ; mais dans les w^2 expressions que la somme comprend, toutes celles dans lesquelles m, n sont diverses s'évanouissent, comme il a été dit ci-dessus ; il ne reste donc que les termes ou $m=n$; d'où l'équation précédente se change en celle-ci :

$$\frac{V}{X\ Y}=\Sigma\frac{V_{m,m}}{X'_m.\ Y'_m\ (x-x_m)(y-y_m)}=\Sigma\frac{1}{R_m\ (x-x_m)\ (y-y_m)}$$

C'est une équation très-remarquable.

On en tire :

$$V=\frac{1}{R_1}(x-x_2)\ (x-x_3)...(x-x_u)\ (y-y_2)\ (y-y_3)...(y-y_m)$$

$$+\frac{1}{R_2}\ (x-x_1)\ (x-y)...\ (x-x_w)\ (y-y_1)\ (y-y_3)...\ (y-y_w)$$

etc.,

en supposant toutefois qu'on ait rendu le coefficient de la plus haute puissance de x dans X et de y dans Y égal à l'unité.

Soit U une fonction rationnelle entière de x et de y et

U_m la valeur de U pour $x = x_m$; $y = y_m$; on peut poser $U = U_m + W(x - x_m) + W'(y - y_m)$, W et W' étant des fonctions de x, y rationnelles et entières.

D'où

$$\frac{U}{(x-x_m)(y-y_m)} = \frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)} + \frac{W}{y-y_m} + \frac{W'}{x-x_m}.$$

Développons ces diverses fractions selon les puissances descendantes de x et de y; la première fraction du second membre est la seule dans ce membre qui fournisse des puissances de x multipliées par des puissances de y; elles sont donc les mêmes que celles qui sont données par

$$\frac{U.}{(x-x_m)(y-y_m)};$$

donc, en développant l'expression

$$\frac{UV}{XY} = \Sigma \frac{U}{R_m (x-x_m)(y-y_m)}$$

selon les puissances descendantes de x et de y, les termes provenant de la multiplication des puissances négatives de x par les puissances négatives de y sont les mêmes qu'en développant

$$\Sigma \frac{U_m}{R_m(x-x_m)(y-y_m)} = \frac{U_1}{R_1(x-x_1)(y-y_1)} + \frac{U_2}{R_2(x-x_2)(y-y_2)},$$

ou bien dans le développement de $\frac{UV}{XY}$ le coefficient de

$$x^{-\alpha-1} y^{-\beta-1} \text{ est } \frac{x_1^\alpha y_1^\beta U_1}{R_1} + \frac{x_2^\alpha y_2^\beta U_2}{R_2} + \dots \frac{x_w^\alpha y_w^\beta U_w}{R_w},$$

d'où, en posant $U = R$,

en développant suivant les puissances descendantes de x et de y l'expression $\frac{RV}{XY}$, le coefficient du terme

$$x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)} \text{ est } x_1^\alpha y_1^\beta + x_2^\alpha y_2^\beta \dots\dots x_w^\alpha y_w^\beta.$$

Ce qui précède peut servir à trouver la valeur des expressions

$$x_1{}^\alpha y_1{}^\beta + x_2{}^\alpha y_2{}^\beta + \ldots\ldots x_w{}^\alpha y_w{}^\beta,$$

laquelle, lorsque ni α ni β ne sont nuls, se trouve péniblement par les méthodes ordinaires.

III.

V ne peut monter qu'au degré $2w-\mu-\nu$; XY est de degré $2w$; donc $\frac{V}{XY}$ ne peut monter qu'au degré $-(\mu+\nu)$; le terme général du développement est

$$\left(\frac{x_1{}^\alpha y_1{}^\beta}{R_1} + \ldots \frac{x_w{}^\alpha y_w{}^\beta}{R_w}\right) x^{-(\alpha+1)}\, y^{-(\beta+1)};$$

par conséquent ce terme est nul toutes les fois qu'on a $\alpha+\beta+2<\mu+\nu$; de là :

Théorème.

Soient φ, f des fonctions quelconques rationnelles entières ; soient $x=x_1$, $x=x_2 \ldots x=x_w$; $y=y_1$, $y=y_2 \ldots y=y_w$, toutes les racines simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$; soit ensuite R_m la valeur de l'expression

$$f'x\, \varphi' y - f'(x)\, \varphi'(x)$$

pour $x=x_m$, $y=y_m$; alors l'expression

$$\frac{x_1{}^\alpha y_1{}^\beta}{R_1} + \frac{x_2{}^\alpha y_2{}^\beta}{R_2} + - \ldots \frac{x_w{}^\alpha y_w{}^\beta}{R_w} = 0,$$

α et β désignant des nombres entiers positifs dont la somme, augmentée de deux unités, est moindre que la somme des degrés des équations $f=0$, $\varphi=0$.

De là cet autre théorème :

Théorème.

Soient f, φ des fonctions quelconques de x et de y, rationnelles et entières; soit F une autre fonction quelconque des mêmes variables, rationnelle et entière, et d'un degré moindre de trois unités que les sommes des degrés de f et de φ, alors

$$\Sigma \frac{F}{f'x\varphi'y - f'y\varphi'x} = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de x et de y qui sont racine simultanées des équations $f=0$, $\varphi=0$.

Nous donnerons un seul exemple pour confirmer ce remarquable théorème. Soient f, φ du second degré; dans ce cas, on peut déterminer la constante λ, de manière que $f+\lambda\varphi$ puisse se décomposer en deux facteurs linéaires, et cela de trois manières, par les trois racines de l'équation cubique dont dépend la valeur de λ; soient λ', λ'' deux de ces valeurs diverses, et soit $\pi=f+\lambda'\varphi=tu$; $\Phi=f+\lambda''\varphi=vw$; t, u, v, w désignent des fonctions linéaires. Les racines des équations $f=0$, $\varphi=0$ sont les mêmes que celles des équations $\pi=0$, $\Phi=0$, qui peuvent se décomposer en ces quatre systèmes d'équations linéaires ·

1) $t=0$, $v=0$; d'où suit $x=x_1$, $y=y_1$;
2) $t=0$, $w=0$; $x=x_2$, $y=y_2$;
3) $u=0$, $v=0$, $x=x_3$, $y=y_3$;
4) $u=0$, $w=0$, $x=x_4$, $y=y_4$;

d'où s'ensuit :

$$\begin{aligned}
t &= \alpha[x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2]\\
u &= \beta[x(y_3-y_4)-y(x_3-x_4)+x_3y_4-y_3x_4]\\
v &= \gamma[x(y_1-y_3)-y(x_1-x_3)+x_1y_3-x_3y_1]\\
w &= \delta[x(y_2-y_4)-y(x_2-x_4)+x_2y_4-y_2x_4]
\end{aligned}$$

α, β, γ, δ étant des constantes.

Posant, pour abréger,

$$+\Delta_1 = x_2(y_3 - y) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)$$
$$-\Delta_2 = x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4)$$
$$+\Delta_3 = x_4(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_1)$$
$$+\Delta_4 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_3(y_1 - y_3),$$

on en déduit :

$$\frac{dt}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = -\alpha\gamma\Delta_4$$
$$\frac{dt}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dt}{dy}\frac{dw}{dx} = +\alpha\delta\Delta_3$$
$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = +\beta\gamma\Delta_2$$
$$\frac{du}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx} = -\beta\delta\Delta_1.$$

Ainsi $\pi'(x)\Phi'(y) - \pi'(y)\Phi'(x) = -\alpha\gamma\Delta_4 uw + \alpha\delta\Delta_3 uv +$
$+\beta\gamma\Delta_2 tw - \beta\delta\Delta_1 tv = (\lambda'' - \lambda')\,[f'x\varphi'y - f'y\varphi'x] = (\lambda'' - \lambda')R.$

Il faut observer que

$$x,\ y,\ t,\ u,\ v,\ w$$

prennent simultanément les valeurs

$$x_1,\ y_1,\ 0,\ -\beta\Delta_2,\ 0,\ \delta\Delta_3,$$
$$x_2,\ y_2,\ 0,\ +\beta\Delta_1,\ \gamma\Delta_4,\ 0,$$
$$x_3,\ y_3,\ -\alpha\Delta_4,\ 0,\ -\delta\Delta_1,$$
$$x_4,\ y_4,\ +\alpha\Delta,\ 0,\ -\gamma\Delta_2,\ 0.$$

On a donc :

$$\frac{\lambda'' - \lambda'}{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{R_1} = \frac{\Delta_3\Delta_4\Delta_1}{R_2} = \frac{\Delta_4\Delta_1\Delta_2}{R_3} = \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{R_4}.$$

D'après le théorème, on doit avoir :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 0,$$

$$\frac{x_1}{R_1} + \frac{x_2}{R_2} + \frac{x_3}{R_3} + \frac{x_4}{R_4} = 0,$$

$$\frac{y_1}{R_1} + \frac{y_2}{R_2} + \frac{y_3}{R_3} + \frac{y_4}{R_4} = 0.$$

Substituant les valeurs de R_1, R_2, R_3, R_4 il vient les identités évidentes :

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0,$$
$$x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3 + x_4 \Delta_4 = 0,$$
$$y_1 \Delta_1 + y_2 \Delta_2 + y_3 \Delta_3 + y_4 \Delta_4 = 0.$$

Kœnigsberg, 13 juin 1835.

Note. Tous les géomètres connaissent le beau mémoire analytico-géométrique de M. Liouville, relatif à ces théorèmes de M. Jacobi (*Journ. de mathém.*, VI, p. 345. 1841).