NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Solution de la question 161

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 114-118
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__114_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 161 (t. VI, p. 272).

PAR M. MENTION,
élève en spéciales (classe de M. Richard).

Soient A et A′ deux points d'une ellipse, AN, A′N deux normales se rencontrant en N, n et n' les grandeurs de ces

normales, p et p' les distances du centre aux tangentes passant par A et A', d le demi-diamètre parallèle à la corde AA', on a : 1° $np+n'p'=2d^2$; 2° si l'on mène les deux autres normales passant par N, on a $np+n'p'+n''p''+n'''p'''=$ constante; 3° si A' se réunit à A, on a $np=d^2$, où n est le rayon de courbure; 4° cette dernière expression s'applique au rayon de courbure d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde, d étant le demi-diamètre parallèle à la tangente. (Joachimsthal).

Je ne démontre que les trois premières parties.

I. Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points A et A'; m étant le coefficient angulaire du diamètre dont la longueur est $2d$, $d^2=\dfrac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2}$ (a, b représentent les demi-axes de l'ellipse), ou, comme $m=-\dfrac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}$,

$2d^2=\dfrac{a^4(y'+y'')^2+b^4(x'+x'')^2}{a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y''}$; on a les équations

$$c^4y^4+2b^2c^2\beta y^3+b^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)y^2-2b^4c^2\beta y-b^6\beta^2=0;$$
$$c^4x^4-2a^2c^2\alpha x^3+a^2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)x^2+2a^4c^2\alpha y-a^6\alpha^2=0$$

(voyez t. VI, p. 367);

$$-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''},$$

dans lesquelles α,β représentent les coordonnées du point N.

Si l'on combine l'une des équations

$$b^2\beta x'-a^2\alpha y'+c^2x'y'=0,\quad b^2\beta x''-a^2\alpha y''+c^2x''y''=0$$

avec la relation

$$-\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}=\frac{a^2\alpha y'y''}{b^2\beta x'x''},$$

on arrive à

$$\alpha=\frac{b^2c^2x'x''(x'+x'')}{a^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')};\ \beta=-\frac{a^2c^2y'y''(y'+y'')}{b^2(a^2b^2+b^2x'x''+ay'y'')}.$$

II. 1° Abaissant du centre de l'ellipse O les perpendiculaires OP, OQ sur les normales, on a AP$=p$; A'Q$=p'$. Le cercle dont ON est le diamètre passe par les points P et Q, et les *puissances* des points A et A' par rapport à ce cercle sont précisément les valeurs de np et $n'p'$. Or l'équation du cercle est $x^2-\alpha x+y^2-\beta y=0$; donc les puissances seront égales à

$$x'^2-\alpha x'+y'^2-\beta y', \quad x''^2-\alpha x''+y''^2-\beta y''.$$

$$np+n'p'=(x'+x'')^2+(y'+y'')^2-\alpha(x'+x'')-\beta(y'+y'').$$

Cette expression devient, en mettant pour α,β les valeurs indiquées ci-dessus, et réduisant au même dénominateur,

$$\frac{\begin{array}{c}(x'+x'')^2(a^4b^4+a^2b^4x'x''+a^4b^2y'y''-b^4c^2x'x'')+\\+(y'+y'')^2(a^4b^4+a^2b^4y'y''+b^2a^4x'x''+a^4c^2y'y'')-\\-2(x'x''+y'y'')\,a^2b^2\,(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')\end{array}}{a^2b^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')}.$$

Le dénominateur étant celui de $2d^2$, au facteur a^2b^2 près, il faut prouver que le numérateur est égal à

$$a^2b^2[a^4(y'+y'')^2+b^4(x'+x'')^2].$$

Ce numérateur, par des réductions évidentes, se transforme en

$$\begin{aligned}&a^4b^4(x'+x'')^2+a^4b^4(y'y'')^2+2(b^4x'x''+a^4y'y'')\\&(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')-2a^2b^2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')(x'x''+y'y'')\\&=2(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')(b^4x'x''+a^4y'y''-a^2b^2x'x''-\\&\qquad-a^2b^2y'y'')+a^4b^4(x'+x'')^2+a^4b^4(y'+y'')^2\ldots\\&=2(a^2-b^2)(a^2y'y''-b^2x'x'')(a^2b^2+b^2x'x''+a^2y'y'')+\\&\qquad+a^4b^4(x'+x'')^2+a^4b^4(y'+y'')^2\ldots\\&=2a^2b^2(a^2-b^2)(a^2y'y''-b^2x'x'')+2(a^2-b^2)(a^4b^4-a^2b^4x'^2-\\&\qquad-a^2b^4x''^2)+a^4b^4(x'+x'')^2+a^4b^4(y'+y'')^2,\end{aligned}$$

parce que

$$a^2y'^2\,.\,a^2y''^2=(a^2b^2-b^2x'^2)(a^2b^2-b^2x''^2).$$

Occupons-nous du facteur de a^2b^2, qui est

$$2(a^2-b^2)(a^2y'y''-b^2x'x'')+2(a^2-b^2)(a^2b^2-b^2x'^2-b^2x''^2)+$$
$$+a^2b^2x'^2+2a^2b^2x'x''+a^2b^2x''^2+a^2b^2y'^2+2a^2b^2y'y''+a^2b^2y''^2$$
$$=2a^4y'y''+2b^4x'x''+2a^4b^2-a^2b^2x'^2-a^2b^2x''^2-2a^2b^4+$$
$$+2b^4x'^2+2b^4x''^2+a^2b^2y'^2+a^2b^2y''^2$$
$$=b^4(x'+x'')^2+2a^4y'y''+2a^4b^2-a^4b^2+a^4y'^2-a^4b^2+$$
$$+a^4y''^2-2a^2b^4+b^2(b^2x'^2+a^2y'^2)+b^2(b^2x''^2+a^2y''^2=$$
$$=b^4(x'+x'')^2+a^4(y'+y'')^2\ldots \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque. Soient i, i' les angles NAF, NA'F, F étant le foyer. Substituant pour p, p', $a\cos i$, $a\cos i'$ dans l'égalité $np+n'p'=2d^2$, il vient $n\cos i+n'\cos i'=2\frac{d^2}{a}$. On a donc ce théorème :

« *La somme des lignes obtenues en projetant les longueurs de deux normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement l'ellipse, sur les rayons vecteurs de ces points, est égale à la corde focale parallèle à la droite qui les joint.* »

Si les deux points sont symétriques par rapport au grand ou au petit axe, on obtient la projection de la normale terminée au grand ou au petit axe $\left(\frac{b^2}{a}, a\right)$.

2° $np+n'p+n''p''+n'''p'''$. Soient B, B' les deux autres points dont les coordonnées seront $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$.

Cette somme égale

$$x'^2+x''^2+x_1^2+x_2^2+y'^2+y''^2+y_1^2+y_2^2-$$
$$-\alpha(x'+x''+x_1+x_2)-\beta(y'+y''+y_1+y_2)$$
$$=(x'+x''+x_1+x_2)^2-2P_2(x)+(y'+y'')+y_1+y^2)^2-$$
$$2P_2(y)-\alpha(x'+x''+x_1+x_2)-\beta(y'+y''+y_1+y_2)\;;$$

et l'on n'a plus qu'à porter les valeurs des sommes et des produits tirés des équations c^4x^4-, etc., etc.; c^4y^4+, etc , etc. Le résultat final est $2(a^2+b^2)$. Ainsi d' étant le demi-diamètre parallèle à BB', on a $d^2+d'^2=a^2+b^2$.

Remarque. « *Les quatre lignes obtenues en projetant les longueurs de quatre normales comprises entre leur point de concours et les points où elles rencontrent rectangulairement la courbe, sur les rayons vecteurs de ces points, est constante.* »

3° Si les deux points A, A′ se confondent, $2np = 2d^2$; $np = d^2$, n représentant le rayon de courbure. Cette valeur n'est autre que celle qui a été donnée par M. Abel Transon (voir t. III, p. 596). Remarquant que

$$d^2 = \frac{b^2}{\cos^2 i},\ p = a\cos i,\ \text{on a}\ \ n = \frac{b^2}{a\cos^3 i}$$

(ce qui est la valeur donnée par un *abonné*, t. IV, p. 256).

Note. Une démonstration plus directe du beau théorème de M. Joachimsthal est à désirer.