EM. LAFONGE

Solution de la question 172

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 103-105
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__103_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 172 (t. VI, p. 454).

PAR M. EM. LAFONGE,
Élève au Collége militaire de La Flèche.

Problème. Étant donnés un arc et sa corde, trouver le rayon (Vincent).

Fig. 26. *Solution.* Supposons le problème résolu, et soit OB le rayon du cercle cherché, AB la corde donnée, que je représente par 2C, et $\widehat{AmB}$ l'arc que je représente par 2A. Décrivons un cercle concentrique avec un rayon quelconque OD, et joignons les extrémités A et B de la corde AB au centre O.

Les rayons OA, OB coupent le cercle OD, dont j'appelle R le rayon connu, aux points C et D; joignons CD; on a :

$$\frac{\text{arc }\widehat{CD}}{\text{corde }\overline{CD}}=\frac{\text{arc }\widehat{AB}}{\text{corde }\overline{AB}}.$$

Appelons $2x$ la longueur CD et $2a$ la longueur de l'arc $\widehat{CD}$. Le triangle rectangle OID nous donne $x=\mathrm{R}\sin\frac{a}{\mathrm{R}}$. Mais on a la proportion $a:x::\mathrm{A}:\mathrm{C}$; d'où $a=\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{C}}$; donc $x=\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{CR}}$; on obtiendra donc x par l'intersection de la droite $y=x$ avec la sinussoïde $y=\mathrm{R}\sin\frac{\mathrm{A}x}{\mathrm{CR}}$.

Je prends pour axes de coordonnées des droites rectangulaires qui se croisent au centre O du cercle, et, de plus, je prends l'axe des abscisses perpendiculaire sur la corde CD.

La bissectrice de l'angle des axes, qui est la droite $y = x$, est Ox'. Je vais chercher les principales circonstances de la courbe $y = R \sin \frac{Ax}{CR}$. Pour que y atteigne son maximum ou son minimum, il faut que pour le maximum on ait $\sin \frac{Ax}{CR} = 1$, et pour le minimum, $\sin \frac{Ax}{CR} = -1$. Donc le maximum de y est R, et son minimum — R. Menant donc au cercle (R) deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, la courbe est tout entière comprise dans leur intervalle. Pour que $y = R$, nous venons de voir qu'il fallait que $\sin \frac{Ax}{CR} = -1$. Donc $\frac{Ax}{CR} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, k étant assujetti à être entier, mais pouvant être positif ou négatif, ou même devenir nul. De là on tire :

$x = \frac{CR}{A} \cdot \frac{(2k+1)\pi}{2}$. Faisons successivement $k = 0 = 1 = 2$.. .

et portons les longueurs trouvées pour x en OM, MM', M'M''.... La courbe passe en G, G', G''...., où les perpendiculaires à l'axe des x coupent les parallèles à cet axe, les perpendiculaires étant menées par les points M, M', M''.... Pour que l'on ait $y = 0$, il faut que

$$R \sin \frac{Ax}{CR} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin \frac{Ax}{CR} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{Ax}{CR} = k\pi;$$

donc $x = \frac{CR}{A} \cdot k\pi$. Alors, donnant à k différentes valeurs, nous porterons sur l'axe des x les valeurs correspondantes oP, PP'.... de x. Il est facile de voir que les points M, M'.... sont les milieux de ces distances, par les expressions même qui les ont données.

Si l'on cherche le coefficient angulaire de la tangente, on trouvera pour ce coefficient, que j'appelle tang ω :

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{A}{C}\cos\frac{Ax}{CR}.$$

Par suite, on voit qu'aux points G, G'.... la tangente est parallèle à l'axe des x, et qu'aux points O, P, P'.... on a :

$$\operatorname{tang}\omega = \pm\frac{A}{C}, \quad \text{donc} \quad \omega > 45^\circ.$$

Décrivant la courbe par points, en donnant à x des valeurs particulières, et en s'aidant des tangentes que l'on déterminerait pour plusieurs points, on trouvera qu'elle coupe la bissectrice au point P ; donc, pour ce point on a :

$$x = R\sin\frac{Ax}{CR}.$$

Par conséquent, EF, ordonnée de ce point, est égale à x ; nous portons cette demi-corde dans le cercle R en CI, et nous la prolongerons jusqu'en D. Alors, joignant OD et OC, nous mènerons une corde AB parallèle à D et égale à 2C, la longueur OB sera le rayon cherché

Note. Il est plus simple de prendre $R = 1$; construisons la courbe $y\sin x = x$; aux valeurs de x égales à $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$.. ., etc. répondent des asymptotes qui comprennent entre elles, alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x, les diverses branches de la courbe ; les maxima et minima correspondent aux diverses valeurs de x qui satisfont à l'équation $x = \operatorname{tang} x$ (voir t. I, p. 247). Menant à la distance $\frac{A}{C}$ une parallèle à l'axe des abscisses, elle coupera le système des courbes en une infinité de points ; on aura une infinité de valeurs pour x. Soit X une de ces valeurs, le rayon cherché répondant à cette valeur est $\frac{A}{X}$.

On peut aussi résoudre la question par une règle de fausse position et par le retour des séries (voir p. 11). Tm.