VANNSON FOURNIER

Question 130. Sur les polygones réguliers plans et sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 91-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__91_1>

QUESTION 130 (t. V, p. 512)

SUR LES POLYGONES RÉGULIERS PLANS ET SPHÉRIQUES.

Étant donné un polygone régulier, trouver le lieu d'un point situé dans son plan, tel que le produit des distances de ce point aux sommets du polygone soit égal à une quantité donnée k (*).

PAR M. VANNSON (FOURNIER),
Professeur à Versailles.

Soit m (*fig.* 11) un des points du lieu demandé, et o le centre du polygone, je mène les rayons ma, mb, etc. ; je dé-

(*) Voir les belles études de M. Serret sur ce genre de courbes (Journal de Mathématiques, t. VIII, p. 49), 1843. Tm.

signe la distance mo par ρ, et par ω l'angle moa; par n le nombre des côtés du polygone : nous aurons

$$ma^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega;$$

en prenant le rayon pour unité :

$$mb^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right);$$

$$mc^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots \text{etc.};$$

multipliant ces égalités, membre à membre, on trouve :

$$k^2 = (\rho^2 + 1 - 2\rho \cos \omega)\left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right)\right]\left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right)\right] \ldots \left[\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Mais, par la théorie des équations trinômes, on sait que le second membre de cette équation est égal à $\rho^{2n} - 2\rho^n \cos n\omega + 1$; nous avons donc

$$\rho^{2n} - 2\rho^n \cos n\omega + 1 = k^2, \text{ d'où } \rho^2 = \sqrt[n]{\cos n\omega \pm \sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}};$$

telle est l'équation polaire de la courbe demandée. Si on suppose $n=1$, on trouve l'équation polaire du cercle ; si on suppose $n=2$, il faut distinguer les cas suivants : $k^2=1$; $k^2<1$; $k^2>1$. Dans le premier cas, on trouve une lemniscate (*fig.* 12) ; dans le deuxième cas, une courbe composée de deux parties fermées et distinctes (*fig.* 13) ; enfin pour $k>1$ une courbe continue et fermée. Proposons-nous maintenant de discuter la courbe en laissant n quelconque, et supposons d'abord : 1° n pair et $k>1$. Il est évident que $\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}$ est toujours plus grand que $\cos n\omega$ pris en valeur absolue ; donc on ne doit prendre ce radical qu'avec le signe $+$. Si on désigne par h un accroissement quelconque donné à ω, et par k l'accroissement correspondant au rayon vecteur, on aura

$$\text{limite}\left(\frac{k}{h}\right) = -\frac{n \sin. n\omega}{\rho^{n-1}}\left[1 + \frac{\cos n\omega}{\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}}\right].$$

Le facteur entre les parenthèses est toujours positif ; on aura donc les valeurs de ω qui donnent les maxima et minima du rayon vecteur en posant $\sin n\omega = 0$; donc

$$\omega = 0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n}, \ldots\ \frac{2(n-1)}{n}.$$

Il est aisé de voir aussi que la première de ces valeurs, et toutes les suivantes de rang impair, donnent un maximum, et toutes les autres un minimum. En effet, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{n}$, limite $\left(\frac{k}{h}\right)$ sera négative ; donc ρ diminuera ; il augmentera depuis $\omega = \frac{\pi}{n}$ jusqu'à $\omega = \frac{2\pi}{n}$, et ainsi de suite. Il est donc facile de représenter la marche de la courbe (*fig.* 14). Cette figure est faite en prenant pour exemple $n = 6$; 2° supposons maintenant $k < 1$; dans ce cas, $\cos n\omega$ est plus grand en valeur absolue que $\sqrt{k^2 - \sin^2 n\omega}$; si donc $\cos n\omega$ est négatif, les deux expressions du rayon vecteur seront imaginaires, et réelles toutes deux dans les cas contraires. Pour avoir les valeurs de ω qui rendent égales les deux valeurs correspondantes de ρ, il faut poser $\sin^2 n\omega = k^2$, ou $\sin n\omega = \pm k$. Soit α la plus petite valeur positive correspondante de ω, nous aurons

$$\omega = \pm\alpha;\quad \pm\alpha + \frac{2\pi}{n};\quad \pm\alpha + \frac{4\pi}{n} \ldots \pm\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n};$$

et les valeurs correspondantes de ρ seront toutes réelles ; si au contraire on prenait $\omega = \pi \pm \alpha$, $3\pi \pm \alpha$, etc., ρ serait imaginaire ; ω variant depuis $-\alpha$ jusqu'à $+\alpha$, ρ sera réel ; depuis $\omega = \alpha$ jusqu'à $\omega = \frac{2\pi}{n} - \alpha$, ρ sera imaginaire ; depuis $\omega = \frac{2\pi}{n} - \alpha$ jusqu'à $\frac{2\pi}{n} + \alpha$, ρ sera réel, et ainsi de suite.

Si à ces remarques, on ajoute, comme dans le cas précédent, la détermination des maxima et minima du rayon vecteur, on pourra facilement construire la courbe (*Voyez fig.* 15).

Nous ne parlerons pas du cas où n est impair ; on le discute de la même manière.

II.

Nous nous proposerons, relativement aux polygones sphériques, une question analogue à la précédente : étant donné un polygone sphérique régulier, trouver sur la sphère le lieu des points tel que le produit des cosinus de leurs distances aux sommets du polygone soit égal à une quantité donnée k.

Soit o le pôle du polygone ABCD.....; n le nombre de ses côtés ; m un point du lieu ; r la distance du pôle à un des sommets ; ρ la distance du point m au pôle ; ω l'angle moA ; x', x'', x''', etc., les distances du point m aux sommets A, B, etc., nous aurons :

$$\cos x' = \cos r \cos \rho + \sin r \sin \rho \cos \omega\,; \quad \cos x'' = \cos r \cos \rho + \sin \rho \sin r \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right) \cos x''' = \cos r \cos \rho + \sin r \sin \rho \cos\left(\omega + \frac{4\pi}{n}\right) \ldots \cos x^{n-1} = \cos r \cos \rho + \sin r \sin \rho \cos\left(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right);$$

multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$k = (\sin r \sin \rho)^n [\cot r \cot \rho + \cos \omega] \left[\cot r \cot \rho + \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{n}\right)\right] :: :$$

Or, le second membre de cette équation, abstraction faite du premier facteur, n'est autre chose que le premier membre de l'équation, qui donnerait $\cos. \frac{n\omega}{n}$, ramenée à la forme

$x^n+px^{n-1}\ldots=0$; en y changeant le signe des racines et en remplaçant l'inconnue par $\cot r \cot \rho$. L'équation qui donne $\cos.\frac{n\omega}{n}$ est la suivante (*) ·

$$\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}=x^n-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n-2}}{2^2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\cdot\frac{x^{n-4}}{2^4}-$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{x^{n-6}}{2^6}-\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^{n-8}}{2^8}\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{x^{n-2p}}{2^{2p}},$$

Il faut, dans l'emploi de cette formule, continuer le calcul des termes jusqu'à ce qu'on arrive à un terme indépendant de x, si n est pair, ou à un terme du premier degré, si n est impair. Changeons dans cette équation le signe des racines, ce qui se fera en remplaçant le premier membre par $-\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}$, si n est impair; remplaçons aussi x par $\cot r \cot \rho$, et nous obtiendrons

$$k=(\sin r \sin\rho)^n\Big[(\cot r\cot\rho)^n-\frac{n}{2^2}(\cot r\cot\rho)^{n-2}+$$
$$+\frac{n(n-3)}{1.2}\frac{(\cos r\cos\rho)^{n-4}}{2^4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{(\cot r\cot\rho)^{n-6}}{2^6}\ldots\pm$$
$$\pm\frac{\cos n\omega}{2^{n-1}}\Big],$$

en prenant le signe $+$ quand n est impair, et le signe $-$ quand n est pair : telle est l'équation de la courbe demandée. On peut, quel que soit n, la résoudre par rapport à $\cos n\omega$; par suite, trouver la valeur de ω correspondante à une valeur arbitraire de ρ, et construire ainsi la courbe par pointes.

Remarque. On peut mettre l'équation précédente sous une forme qui permettra de calculer plus simplement la valeur de ω correspondante à une valeur donnée de ρ. Pour cela,

(*) Nous laisserons aux elèves le soin de démontrer cette formule. (V. t. V, p. 223, formule 43.)

j'ajoute et je retranche au facteur entre parenthèses, la quantité $\frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui donne :

$$k=(\sin r\sin\rho)^n\left[\overline{\cot r\cot\rho}^{\,n}-\frac{n}{2^2}\,\overline{\cot r\cot\rho}^{\,n-2}\ldots\pm\frac{1}{2^{n-1}}\right]\mp$$

$$\mp(\sin r\sin\rho)^n.\frac{\sin^2\frac{n\omega}{2}}{2^{n-2}}.$$

Dans le facteur entre parenthèses, $\cos n\omega$ a été remplacé par 1, qui est le cosin. de 0; donc ce facteur peut se décomposer de la manière suivante :

$$(\cot r\cot\rho+1)\left(\cot r\cot\rho+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cot r\cot\rho+\cos\frac{4\pi}{n}\right),\text{ etc.};$$

donc l'équation de la courbe devient :

$$k=\cos(r-\rho)\left(\cos r\cos\rho+\sin r\sin\rho\cos\frac{2\pi}{n}\right),\text{ etc. }\ldots\mp$$

$$\mp(\sin r\sin\rho)^n.\frac{\sin\frac{2n\omega}{2}}{2^{n-2}}.$$

Si donc on porte l'arc ρ sur le grand arc qui joint le pôle à un quelconque des sommets, et qu'on désigne par P le produit des cosinus des distances du point obtenu à tous les sommets, on aura :

$$\sin\left(\frac{n\omega}{2}\right)=\sqrt[2]{\frac{\mp(k-P).2^{n-2}}{(\sin r\sin\rho)^n}},$$

équation qui donnera l'angle ω par un calcul simple. Il faudra prendre le signe supérieur dans le cas de n impair.

Si dans l'équation de la courbe nous faisons $n=2$, nous trouverons $k=\cos^2 r\cos^2\rho-\sin^2\rho\sin^2 r\cos^2\omega$; on tire de là $\sin^2\rho=\frac{\cos^2 r-k}{\cos^2 r+\sin^2 r\cos^2\omega}$; je pose, pour simplifier, la formule $k=\lambda\cos r$, d'où $\sin\rho=\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\tang r\cos^2\omega}}$; on peut supposer λ positif, négatif ou nul. Quand λ est positif, il faut le prendre moindre que l'unité ; alors $\sin\rho$ est toujours moindre que 1, quel que soit ω. En faisant $\omega = 0$, $\sin\rho$ atteint la valeur minimum ; il augmente quand ω augmente, et atteint son maximum quand $\omega = \frac{\pi}{2}$. Il faut remarquer de plus qu'à un même sinus correspondent deux arcs supplémentaires l'un de l'autre. La courbe est donc composée de deux parties fermées (comme on le voit *fig.* 16) ; et si du point C, milieu de l'arc donné AB, comme pôle, on décrit un grand cercle, il divisera en parties égales tout arc de grand cercle compris entre les deux branches de la courbe et partant du point C.

Supposons maintenant λ négatif, et posons $\lambda = -\lambda'$, nous aurons pour équation de la courbe :

$$\sin\rho = \sqrt{\frac{1+\lambda'}{1+\tang^2 r \cos^2\omega}};$$

pour qu'on trouve $\sin\rho < 1$, il faut avoir $\cos^2\omega \geqq \lambda'\cot^2 r$, et par suite $\lambda'\cot^2 r < 1$; supposons cette condition remplie, et posons $\cos\omega' = \pm\cot r.\sqrt{\lambda'}$. Si nous faisons au point C (*fig.* 16), milieu de l'arc passant par les deux points donnés, deux angles, BCD, BCD', égaux à ω'; puis, que sur les arcs ainsi tracés et les prolongeant, nous prenions

$$CD = CD' = CD'' = CD''' = \frac{\pi}{2},$$

la courbe sera tout entière comprise dans les deux angles DCD'', D'CD''; on aura le maximum et le minimum de ρ en posant $\omega = 0$; et tous les arcs partant du point C compris dans la courbe seront divisés en parties égales par un grand cercle ayant C pour pôle. Il est aisé, d'après ces remarques, de construire la courbe (*fig.* 16).

Si $\lambda = 0$, l'équation se décompose en deux facteurs ; et les égalant séparément à o, on trouve $\cos \rho = \pm \operatorname{tang} r \cos \omega$. On reconnaît là les équations polaires de deux cercles ayant pour distances polaires $\frac{\pi}{2}$, et pour pôles chacun des deux points donnés (*).