

TERQUEM

**Théorie des rapports projectifs, sinussiques,
segmentaires, triangulaires, pyramidaux
; involutions projectives**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 68-74

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__68_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE

des rapports projectifs, sinussiques, segmentaires, triangulaires, pyramidaux ; involutions projectives.

1. Soit un faisceau de $2n$ droites, situées dans un même plan, partant d'un même point, et coupé par une transversale. Prenant ces droites 2 à 2, on obtient $n(2n-1)$ angles, autant de triangles et autant de segments sur la transversale, servant de bases.

2. Prenons n de ces triangles, mais tellement que les côtés renferment les $2n$ droites du faisceau. Il est évident que le même côté ne doit pas être répété. Le nombre total de ce genre d'arrangements est égal au produit continu des nombres impairs depuis 1 jusqu'à $2n-1$. En effet, représentons ces côtés par $a_1, a_2 \dots a_{2n}$; combinons-les 2 à 2; nous aurons un premier groupe commençant par a_1 , de $2n-1$ termes; un second groupe, commençant par a_2 , de $2n-2$ termes, et enfin le dernier groupe, composé du terme unique $a_{n-1}a_n$. Pour former un arrangement triangulaire, prenons la première combinaison a_1a_2 du premier groupe; on ne peut la joindre avec aucune du second groupe, mais à une combinaison quelconque du troisième groupe; celle-ci exclut le quatrième groupe, et ainsi de suite; donc a_1a_2 fournit $1.3.5 \dots 2n-3$ arrangements, autant a_1a_3 , etc.; donc le nombre total est $1.3.5 \dots 2n-1 = p$.

Autrement. Soit P_n le nombre de ces arrangements pour $2n$ triangles; a_1a_2 se combinant avec les $2n-2$ côtés res-

tants, donne P_{2n-2} arrangements, de même a, a , etc. ; donc $P_{2n} = (2n-1) P_{2n-2}$, d'où l'on déduit le nombre indiqué.

3. *Rapport projectif triangulaire.* Concevons que dans chaque arrangement on fasse le produit des aires des n triangles qui y entrent, on aura p de ces produits, qui fournissent $p(p-1)$ rapports par quotient, qu'on peut partager en $\frac{p(p-1)}{2}$, indépendants les uns des autres, et $\frac{p(p-1)}{2}$, respectivement inverses des premiers. Ce sont ces rapports que nous désignons sous le nom de *projectifs triangulaires*. L'épithète *projectif* sera expliquée plus bas.

Observation. Plusieurs de ces rapports ayant des facteurs communs aux deux termes, se réduisent et sont relatifs à des faisceaux ayant moins que $2n$ côtés ; ces rapports doivent être rejetés, ce qui en réduit considérablement le nombre, comme nous verrons plus bas.

Rapport projectif sinussique. Remplaçant dans le *rapport triangulaire* chaque aire par le demi-produit des deux côtés et le sinus de l'angle compris, ces côtés se trouvant en même nombre comme facteurs, dans les deux termes du rapport, s'en iront, et il ne reste qu'un rapport entre des sinus.

Rapport projectif segmentaire. Remplaçant dans le *rapport triangulaire* chaque aire par le demi-produit de la hauteur, commune à tous, par les segments qui servent de bases, la hauteur s'en va, et il ne reste qu'un rapport entre des segments.

4. Ces trois sortes de rapports ne sont au fond qu'un seul et même rapport auquel nous avons donné des noms différents, selon des points de vue différents. Deux quelconques d'entre eux sont des conséquences immédiates du troisième.

5. Supposons qu'on coupe le faisceau par deux transversales ; un rapport segmentaire de la première transversale

entraîne le même rapport entre les sinus, et celui-ci établit le même rapport entre les segments de la seconde transversale ; donc le même rapport segmentaire existe pour les deux transversales, mais l'une de ces transversales est la projection *perspective* de l'autre ; de là ce théorème :

Le rapport segmentaire d'une droite se projette perspective-ment sur un plan quelconque, sans changer de valeur.

De là l'origine de l'épithète *rapport projectif*.

Observation. Il est évident que le théorème subsiste lorsque le point de concours s'éloigne à l'infini et que les droites projetantes deviennent parallèles.

Corollaire 1. Les rapports sinusiques se projettent perspective-ment sur un plan sans changer de valeur.

Corollaire 2. Lorsqu'une transversale devient parallèle à une droite du faisceau, parmi les $n(2n - 1)$ segments, $2n - 1$ deviennent infinis ; un de ces derniers segments se trouvant au numérateur et l'autre au dénominateur d'un rapport projectif, il se simplifie et ne contient plus dans chaque terme que $n - 1$ facteurs ; mais ce dernier rapport simplifié, généralement parlant, n'est plus projectif.

6. *Application.* Soit $n = 2$; désignons le sommet commun par la lettre O , et par A_1, A_2, A_3, A_4 les points où la transversale coupe successivement les quatre droites du faisceau ; on a $p = 1.3$; $p(p - 1) = 6$; ainsi on a six triangles, autant de sinus, autant de segments. Le nombre d'arrangements dont il est question au § 2 est ici $1.3 = 3$. Ces arrangements sont, en substituant les segments aux triangles, $A_1A_2.A_3A_4$; $A_1A_3.A_2A_4$; $A_1A_4.A_2A_3$, qui donnent six rapports projectifs, savoir :

$$\frac{A_1A_2.A_3A_4}{A_1A_3.A_2A_4} ; \quad \frac{A_1A_2.A_3A_4}{A_1A_4.A_2A_3} ; \quad \frac{A_1A_3.A_2A_4}{A_1A_4.A_2A_3} .$$

et les trois rapports inverses.

Le second de ces rapports, lorsqu'il est égal à l'unité, a été beaucoup étudié par les anciens sous le nom de rapport *harmonique*, et M. Chasles a donné à ce même rapport projectif, lorsqu'il n'est pas égal à l'unité, le nom très-convenable de rapport *anharmonique*, et a fondé dessus d'importants et féconds théorèmes. Mais la nature projective de ce rapport est déjà énoncée dans Pappus (liv. 7, prop. CXXIX).

7. *Théorèmes de Fontaine et d'Euler.* Il existe entre ces trois rapports une relation remarquable, signalée par Euler, mais qui avait déjà été énoncée sous une forme plus générale par Fontaine. Voici la relation :

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4}{A_1A_3 \cdot A_2A_4} + \frac{A_1A_4 \cdot A_2A_3}{A_1A_3 \cdot A_2A_4} = 1.$$

Nous laissons aux élèves le soin d'en trouver la démonstration. Cette relation est un corollaire du théorème *triangulaire* de Fontaine (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 154), et qui peut s'énoncer ainsi :

Un point situé dans le plan d'un quadrilatère étant considéré comme le sommet commun de six triangles ayant pour bases les côtés et les diagonales du quadrilatère, le produit des aires des triangles qui ont pour bases les diagonales est égal au produit des triangles qui ont pour bases deux côtés opposés plus ou moins le produit des triangles qui ont pour bases les deux autres côtés, selon que le point est hors du quadrilatère ou dans le quadrilatère.

Raisonnant comme ci-dessus, on voit que la relation subsiste aussi entre les sinus des angles du faisceau des quatre droites qui vont aux angles du quadrilatère; donc elle s'applique aux segments de la transversale qui coupe le faisceau; et c'est précisément le théorème d'Euler, lequel étant admis peut faire retrouver celui de Fontaine, qui n'est, comme

nous avons dit à l'endroit ci-dessus cité, qu'une interprétation géométrique d'une propriété des *déterminantes*. Remarquons d'erechef à cette occasion qu'une *déterminante* dont chaque terme a deux facteurs peut représenter le double de l'aire d'un triangle, et une *déterminante* à trois facteurs, le sextuple du volume d'une pyramide; à toutes les relations nombreuses que l'on connaît maintenant sur ces *déterminantes*, correspondent donc autant de théorèmes de géométrie, et *vice versa*. Aussi le premier analyste de notre époque recommande sans cesse la culture de la géométrie, et nous avons entendu le célèbre professeur de géométrie supérieure recommander, dans une leçon inaugurale, la culture de l'analyse algébrique; nombre et ligne, deux instruments également nécessaires, également admirables.

8. *Théorème de Ptolémée*. Si on prend un quadrilatère inscriptible, et un point fixe sur la circonférence, le diamètre étant pris pour unité, chaque corde est le sinus de la moitié de l'arc qu'elle sous-tend; et par conséquent le théorème sinussique de Fontaine se traduit en celui-ci: *dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés*; théorème de Ptolémée que Legendre a fait revivre dans la géométrie.

9. *Théorème général sur les polygones*. Soient $A_1, A_2, A_3 \dots A_{2n}$ un polygone inscriptible de $2n$ sommets. Si l'on mène d'un point de la circonférence des droites à tous les sommets, et qu'on coupe le faisceau par une transversale, si l'on forme un rapport projectif segmentaire, il subsistera aussi entre les côtés et diagonales correspondants du polygone, et réciproquement, si un tel rapport existe entre les côtés et les diagonales du polygone, il existe aussi entre les segments de la transversale.

Démonstration. Les côtés du polygone peuvent être considérés comme les sinus des angles correspondants du faisceau.

10. *Théorème sur les coniques de M. Chasles.* Si d'un point quelconque d'une conique on mène à quatre autres points fixes de ce périmètre quatre droites, le rapport anharmonique des sinus est constant, quelle que soit la position du point fixe.

Démonstration. Toute conique peut être considérée comme la projection perspective d'un cercle; or, la proposition est d'une évidence intuitive dans le cercle; et le rapport anharmonique étant projectif, la proposition est donc vraie pour une conique quelconque.

Observation. C'est sur ce théorème que M. Chasles a fondé toute la théorie des coniques; théorème qui est applicable à un polygone inscrit quelconque (voir § 9).

11. *Application.* $n = 3$; $p = 1.3.5 = 15$; $\frac{P(p-1)}{2} = 105$;

ces rapports projectifs comprennent aussi ceux qui sont relatifs aux faisceaux de quatre droites; ces six droites donnent quinze faisceaux quaternaires, et chacun de ces faisceaux fournit trois rapports projectifs; il faut donc retrancher quarante-cinq rapports projectifs pour avoir ceux qui n'appartiennent qu'à six; il reste donc soixante rapports projectifs: ainsi en désignant les points où la transversale coupe le faisceau successivement par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, on aura ces quatre rapports segmentaires projectifs, ayant tous pour dénominateur le produit ternaire 12.34.56, et pour dénominateurs 13.25.46; 14.26.35; 15.23.46; 16.23.45; ils sont uniquement relatifs aux faisceaux de six, et il y en a encore cinquante-six de ce genre.

12. *Théorème sur les droites dans l'espace.* Soient A, B, C trois droites situées dans l'espace d'une manière quelconque. Sur la première droite A prenons $2n$ points désignés successivement par $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$; par chacun de ces points menons une droite rencontrant les deux autres B et C; dési-

gnons les points de rencontre respectivement par $B_1, B_2 \dots B_{2n}$; $C_1, C_2 \dots C_{2n}$; un rapport segmentaire projectif pris sur l'une de ces droites aura même valeur sur les deux autres.

Démonstration. Projétons toute la figure orthogonalement sur un plan perpendiculaire à la droite A ; le système des transversales $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2 \dots A_{2n}B_{2n}C_{2n}$, se projettera suivant un faisceau de $2n$ droites, et le rapport segmentaire pris sur $B_1 \dots B_{2n}$ conserve la même valeur sur la projection; et de même pour $C_1 \dots C_{2n}$. Or dans la projection les rapports sont égaux; ils le sont donc aussi dans l'espace; donc, etc.

13. *Rapports projectifs pyramidaux.* Prenons deux points A_p, A_q de la première droite, et les deux points correspondants B_p, B_q sur la seconde droite. Ces quatre points sont les sommets d'une pyramide triangulaire dont le volume est égal au $\frac{1}{6}$ du produit des deux segments A_pA_q et B_pB_q par leur plus courte distance et par le sinus de l'angle d'inclinaison. Or ces deux derniers facteurs restent les mêmes, quels que soient les indices p et q ; en multipliant donc le rapport segmentaire relatif à A avec le rapport segmentaire relatif à B , on peut remplacer le produit des deux segments correspondants par le volume de la pyramide correspondante, et on obtient un rapport pyramidal égal à celui qu'on obtient en combinant la droite A avec la droite C , ou B avec C ; en ce sens les rapports sont projectifs, et pour les droites dans l'espace, les volumes des pyramides sont analogues aux aires des triangles dans le plan.

(La suite prochainement.)