

LENTHÉRIC

Note sur la génération des surfaces du second ordre par les lignes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 5-8

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOTE

Sur la génération des surfaces du second ordre par les lignes du second ordre.

PAR M. LENTHÉRIC NEVEU,
Professeur.

1. Soient trois axes rectangulaires ox , oy , oz et deux ellipses verticales ayant pour centre commun, l'origine des coordonnées.

La première située dans le plan des xz dont les équations sont :

$$\left. \begin{array}{l} c^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 c^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} (1).$$

La deuxième située dans le plan des yz ayant un axe zc commun avec la première et dont les équations sont :

$$\left. \begin{array}{l} c^2 y^2 + b^2 z^2 = b^2 c^2 \\ x = 0 \end{array} \right\} (2).$$

Un plan horizontal $z=h$ coupera généralement les ellipses en quatre points, savoir : l'ellipse (1) en deux points déterminés par

$$y=0, z=h \text{ et } c^2 x^2 + a^2 h^2 = a^2 c^2, \text{ d'où } x = \pm \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2},$$

et l'ellipse (2) en deux autres points déterminés par

$$x=0, \quad z=h \text{ et } c^2 y^2 + b^2 h^2 = b^2 c^2, \text{ d'où } y = \pm \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2}.$$

Imaginons dans le plan horizontal $z=h$, une troisième ellipse dont ces quatre points seraient les sommets, Elle aura pour équations :

$$\frac{a^2(c^2-h^2)}{c^2} y^2 + \frac{b^2(c^2-h^2)}{c^2} x^2 = \frac{a^2 b^2 (c^2-h^2)^2}{c^4}$$

$$z=h,$$

ou plus simplement en supprimant le facteur $\frac{c^2-h^2}{c^2}$ et chassant le dénominateur :

$$\left. \begin{aligned} a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 &= a^2 b^2 (c^2 - h^2) \\ z &= h \end{aligned} \right\} (3).$$

En faisant varier h depuis $-c$ jusqu'à $+c$ l'ellipse (3) se mouvra d'une manière continue parallèlement au plan des x , pendant que ses quatre sommets décriront les deux ellipses verticales (1) et (2). Elle engendrera ainsi une surface dont l'équation résultera de l'élimination de h entre les deux équations (3) et s'obtiendra évidemment en substituant z en place de h dans la première de ces équations. L'équation de cette surface sera donc :

$$a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 (c^2 - z^2),$$

$$\text{ou } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \text{ équation de l'ellipsoïde.}$$

2. En remplaçant les ellipses (1) et (2) par deux hyperboles dont l'axe commun $2c$ deviendrait l'axe non transverse, c'est-à-dire en changeant c^2 en $-c^2$ dans les équations (1) (2), les équations (3) seraient remplacées par :

$$\begin{aligned} a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 &= a^2 b^2 (c^2 + h^2), \\ z &= h, \end{aligned}$$

et représenteraient encore une ellipse qui en faisant varier h resterait toujours horizontale, et dont les sommets décriraient les deux hyperboles verticales. L'équation de la surface engendrée s'obtiendrait en remplaçant h par z dans la première des équations ci-dessus, ce qui donnerait :

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 - a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2,$$

ou bien $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, équation de l'hyperboloïde à une nappe.

3. En changeant dans (1) a^2 en $-a^2$ et dans (2) b^2 en $-b^2$ les deux ellipses seraient remplacées par deux hyperboles ayant l'axe commun $2c$ pour axe transverse. Les équations (3) deviendraient :

$$a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 (h^2 - c^2),$$

$$z = h,$$

et représenteraient encore une ellipse qui ne serait imaginaire que pour des valeurs de h comprises entre $-c$ et $+c$. L'équation de la surface engendrée serait :

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 - a^2 b^2 z^2 = -a^2 b^2 c^2,$$

ou bien $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, équation de l'hyperboloïde à deux nappes.

4. En remplaçant les ellipses (1) et (2) par deux paraboles verticales :

$$x^2 = 2pz, y = 0 \text{ et } y^2 = 2qz, x = 0;$$

le plan $z = h$ donnera quatre points d'intersection qui seront les sommets d'une ellipse variable ayant pour équations :

$$qx^2 + py^2 = 2pqh,$$

et

$$z = h.$$

L'ellipse ne sera imaginaire que pour des valeurs négatives de h , et l'on aura pour équation de la surface engendrée :

$$qx^2 + py^2 - 2pqz = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

équation du paraboløide elliptique.

En changeant le signe de q , c'est-à-dire en supposant que la seconde parabole tourne la concavité en sens contraire, l'équation de la surface engendrée serait $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ équation connue du paraboløide hyperbolique.

Note. C'est ainsi que les surfaces du second ordre sont construites dans le *Manuel de géométrie* (p. 360).

Tm.