Sur les premiers théorèmes de la stéréométrie. D'après M. Koppe, professeur à Sœst en Westphalie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 480-483

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__480_1>

SUR LES

PREMIERS THÉORÈMES DE LA STÉRÉOMÉTRIE,

D'après M. Koppe, professeur à Sœst en Westphalie.

(*Crelle*, XIV, 70, 1805)

—

Dans la planimétrie d'Euclide, les propositions sont arrangées avec un tel art, que l'une est toujours une conséquence des propositions précédentes; de telle sorte qu'aucune interversion de rang n'est possible. Cette impossibilité dlminue à mesure que l'on avance, et arrivé aux plans, on a déjà acquis une telle richesse, qu'on peut admettre plusieurs ordres de succession pour asseoir les premiers fondements stéréométriques. Au premier abord, la marche la plus simple paraît être de considérer les lignes dans l'espace, ensuite la position des lignes et des plans, puis la position des plans dans l'espace. C'est aussi la marche adoptée par Euclide. Toutefois, comme la position mutuelle des lignes dans l'espace, ou envers un plan, ne peut s'établir solidement qu'à l'aide d'intersections de plans, ces déductions impliquent une sorte d'inconséquence. C'est ce qui a engagé M. Koppe à renverser l'ordre suivi et à commencer par la considération des plans. Il procède ainsi, mais nous supprimons les démonstrations que les lecteurs trouveront facilement.

1. *Principe.* La position d'un plan est déterminée par trois points non en ligne droite, par une droite et un point hors de la droite, par deux droites qui se coupent, par deux droites parallèles.

2. Deux plans ne peuvent avoir que ces trois positions possibles : ils sont parallèles, se coupent suivant une droite, ou coïncident. La même chose pour une droite et un plan.

3. *Définition.* L'angle dièdre est l'espace infini renfermé entre deux plans qui se coupent. Entre deux angles dièdres peuvent exister les trois relations de grandeur; angles adjacents, opposés au sommet; l'angle dièdre droit est celui qui est égal à son adjacent; deux plans sont perpendiculaires lorsqu'ils forment un angle dièdre droit.

4. De là suit que tous les angles dièdres droits sont égaux, comme dans la planimétrie et autres conséquences sur les angles adjacents et les angles opposés par le sommet.

5. *Premier théorème.* L'intersection de deux plans perpendiculaires sur un troisième est perpendiculaire sur les deux

droites; l'intersection des deux plans avec le troisième, se démontre par superposition.

6. *Deuxième théorème.* Si de deux plans, le premier est perpendiculaire à un troisième plan, et si la droite d'intersection des deux plans est perpendiculaire sur l'intersection du premier et du troisième plan, cette droite d'intersection sera aussi perpendiculaire sur l'intersection du second et du troisième plan, et ce second plan est aussi perpendiculaire sur le troisième; se démontre aussi par la superposition.

7. *Troisième théorème.* Si l'intersection de deux plans est perpendiculaire sur les deux intersections de ces deux plans par un troisième plan, les deux plans sont perpendiculaires sur ce troisième plan. Par superposition.

Observation. On peut faire précéder ce troisième théorème aux deux premiers; on évite ainsi de parler de plans perpendiculaires avant d'en avoir montré la possibilité.

8. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans un plan, elle est perpendicnlaire à toute autre droite menée par son pied dans le même plan. Conséquence des théorèmes deuxième et troisième; on peut toutefois démontrer aussi ce théorème par la superposition.

9. *Définition.* Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans le plan.

10. Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites menées par son pied dans le plan (8).

a) Si deux plans sont perpendiculaires sur un troisième, la droite d'intersection est perpendiculaire sur ce troisième plan (5).

b) Deux plans étant perpendiculaires, une droite menée dans l'un des plans perpendiculairement à l'intersection commune, est perpendiculaire à l'autre plan (6).

c) Tout plan passant par une droite perpendiculaire à un second plan est perpendiculaire à ce plan (7).

11. *a*) Deux droites perpendiculaires sur un plan sont parallèles (4).

b) Si de deux droites parallèles l'une est perpendiculaire sur un plan, l'autre est aussi perpendiculaire sur ce plan (10).

c) Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles; deux angles plans à côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.