

DRIANE DE LORNAG

Solution de la question n° 169, p. 394

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 476-480

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__476_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION N^o 169, p. 394 (*),

PAR M. DRIANE DE LORNAG,

élève en spéciales.

Soit O l'horizontale passant par le point de départ, et OY la verticale du même point, v la vitesse initiale et α son angle avec OY ; les projections du mouvement sur ces deux droites seront :

$$(1) \quad y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$(2) \quad x = vt \cos \alpha,$$

(*) On est prié de faire la figure.

t désignant le temps compté à partir du départ du mobile ; l'élimination de t entre ces deux équations donnera la trajectoire décrite par le centre de gravité du mobile, qui sera

$$(3) \quad \frac{gx^2}{2\nu^2 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tang} \alpha + y = 0;$$

elle représente une parabole dont l'axe est parallèle à OY. Si on change x en $x+h$, y en $y+k$, les coefficients de x^2 et de y seront les mêmes dans la transformée quels que soient h et k ; donc cette courbe, rapportée à son sommet, aura pour équation :

$$\frac{gx^2}{2\nu^2 \cos^2 \alpha} + y = 0;$$

son paramètre sera donc $\frac{2\nu^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

Le sommet sera le point pour lequel la valeur de y , prise dans l'équation (1), sera maximum, c'est-à-dire lorsqu'on aura :

$$\nu \sin \alpha = gt \quad \text{ou} \quad t = \frac{\nu \sin \alpha}{g};$$

en portant cette valeur dans les équations (1), (2), on aura pour les coordonnées du sommet :

$$Y = \frac{\nu^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (4)$$

$$X = \frac{\nu^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad (5)$$

En éliminant α entre ces deux équations, nous aurons le lieu des sommets; divisant membre à membre, il vient :

$$\frac{Y}{X} = \frac{t g \alpha}{2},$$

d'où
$$\operatorname{sit} \alpha = \frac{4Y^2}{X^2 + Y^2};$$

portant cette valeur dans (4)

$$2gY = \frac{4\nu^2 Y^2}{X^2 + 4Y^2}$$

$$gYx^2 + 4gY^3 - 2\nu^2 Y^2 = 0.$$

En supprimant la solution $Y = 0$, qui ne satisfait pas à la question, on a

$$gx^2 + 4gY^2 - 2\nu^2 Y = 0, \quad (6)$$

équation d'une ellipse dont l'axe des Y est un axe de symétrie, ce qu'on pouvait prévoir; car en donnant à α les valeurs α , et $180^\circ - \alpha$, on doit obtenir deux paraboles égales et symétriquement placées par rapport à OY. Pour avoir la partie de OY interceptée par la courbe, il faut dans l'équation (6) faire $x = 0$; la différence des deux valeurs de Y sera la valeur cherchée.

$$\text{On trouve ainsi } Y = 0, Y = \frac{\nu^2}{2g}, \text{ d'où } b = \frac{\nu^2}{4g}.$$

Pour avoir la demi-longueur a du deuxième axe, nous ferons $Y = \frac{\nu^2}{4g}$, et la valeur trouvée pour x sera a , d'où

$$a = \frac{\nu^2}{2g}.$$

Si à la valeur de Y prise dans l'équation (4), on ajoute la valeur $\frac{\nu^2 \cos^2 \alpha}{2g}$, quart du paramètre, on aura l'ordonnée constante de la directrice $\frac{\nu^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2g}$ ou $\frac{\nu^2}{2g}$; cette valeur étant indépendante de α , toutes les paraboles proposées ont donc même directrice.

Quant aux foyers, ils ont mêmes abscisses que les sommets correspondants, et leurs coordonnées sont égales à celles de ces mêmes sommets, moins le quart du paramètre; en se

reportant aux valeurs (4) et (5), on voit que les coordonnées cherchées sont :

$$y = -\frac{\nu^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

$$x = \frac{\nu^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

élevant au carré et ajoutant :

$$y^2 + x^2 = \frac{\nu^4}{4g^2},$$

équation indépendante de α ; elle représente donc le lieu des foyers. Ce lieu est un cercle dont le centre est au point de départ, et dont le rayon est égal à $\frac{\nu^2}{2g}$, valeur que l'on a trouvée déjà pour l'ordonnée de la directrice et le petit axe de l'ellipse; ceci fait voir que les trois lignes sont tangentes au point $(x=0, y=\frac{\nu^2}{2g})$. On pouvait prévoir que les trois lieux se rencontreraient en ce point; car si on lance le projectile verticalement, il décrira une ligne droite dont la longueur calculée directement sera $\frac{\nu^2}{2g}$. Cette ligne étant la limite de toutes les paraboles proposées, lorsque le paramètre décroît indéfiniment, son extrémité doit être la limite des positions des sommets et des foyers de toutes les paraboles proposées, et se trouver sur la directrice ainsi que nous l'avons vérifié. On peut remarquer que l'ellipse et le cercle ont même tangente verticale; ainsi toute parallèle à la verticale coupant l'une des deux courbes en deux points rencontrera aussi l'autre en deux points.

Nous avons fait voir que d'après la nature de la question, les sommets et les foyers étaient symétriquement placés par rapport à l'axe des y . Il suffira donc, pour prouver que tous les points des deux lieux satisfont à la question, de démontrer que ceux qui sont situés à droite de l'axe des y satisfont. A

la seule inspection de la valeur (4), on reconnaît que l'ordonnée du sommet peut varier entre 0 et $\frac{\nu^2}{2g}$, comme l'ordonnée des différents points de l'ellipse; donc tous les points de l'ellipse peuvent être occupés par des sommets. Imaginons une parallèle à oy , coupant l'ellipse en deux points M , M' ; ces deux points seront les sommets des deux paraboles qui auront leurs foyers sur le cercle et sur la droite MM' . Celle qui passe en M' a son foyer au-dessus de l'axe des x , attendu que l'on a $M'P < \frac{\nu^2}{4g}$; quant à celle qui a son sommet en M , son foyer est placé en N au-dessous de l'axe des x , parce que la distance MP , distance du sommet à la directrice, est plus petite que $\frac{\nu^2}{2g}$. La droite MM' étant quelconque, il est démontré ainsi que tous les points du cercle peuvent être occupés par les foyers.

Note. M. Paul Serret a donné une solution plus courte du même problème. Il reste à démontrer que l'enveloppe de toutes ces paraboles est une parabole.