NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Solution et généralisation de la question 53me proposée par M. Finck

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 46-53

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__46_1>

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION

De la question 53[me] *proposée par M. Finck* (Nouvelles Annales, t. I, p. 520).

PAR M. PAUL SERRET,
elève en mathématiques. (*)

(*Fig.* 5). 1° Soit un faisceau de n droites convergentes au point o, et $n-1$ points X_1, X_2, ... X_{n-1} en ligne droite, le tout dans un même plan; prenez sur oA la première du faisceau, arbitrairement les points A_1, B_1, C_1.... en nombre quelconque; du premier point X_1, comme centre, projetez ces points sur la seconde droite du faisceau en A_2, B_2, C_2..., du point X_2 comme centre, projetez de même ces derniers sur la troisième droite du faisceau, et ainsi de suite. Soient A_n, B_n, C_n.... les dernières projections obtenues du point X_{n-1} comme centre sur la $n^{ème}$ du faisceau; les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n.... concourront en un même point situé sur la droite X_1X_{n-1}.

2° Si $n=3$, et si X_1 restant fixe, on suppose que X_2 décrive une conique, quel sera le lieu décrit par le point des concours des droites A_1A_n, B_1B_n?

(*) Voici enfin un elève qui étudie la géométrie du dix-neuvième siècle.

Solution. — Première partie.

1. D'abord, il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition pour trois points seulement pris sur la première droite du faisceau.

2. Lemme. Si le théorème est vrai pour le cas de n égal ou inférieur à a, il sera vrai aussi pour le cas de $n=a+1$.

Soit le théorème démontré pour tous les nombres depuis 3 jusqu'à $n-1$, il sera encore vrai pour le nombre n. Soient en effet oA, oB et oK la première, la deuxième et la $n^{ième}$ droite du faisceau; X_1 le premier point, X_2 le second; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; et A_n, B_n, C_n, les points déterminés par les données ou par les projections sur la première, la deuxième et la $n^{ième}$ droite du faisceau. Il faut prouver que les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n concourent en un même point. En effet, considérons le faisceau de $n-1$ droites $oB....oK$, et le système de $n-2$ points X_2, $X_3....X_{n-1}$; les points donnés sur la première droite oB de ce nouveau faisceau, étant A_2, B_2, C_2, de l'hypothèse faite en tête du lemme, nous conclurons que les droites A_2A_n, B_2B_n, C_2C_n, concourent en un même point x_2 situé sur la droite X_1X_{n-1}. Cela posé, considérons le nouveau faisceau de trois droites oA, oB, oK, relativement aux deux points X_1 et X_2; on voit que les points A_1, B_1, C_1, de la première du faisceau, sont projetés en A_2, B_2, C_2 sur la seconde du faisceau suivant le point X_1; que les points A_2, B_2, C_2 sont projetés eux-mêmes par le point x_2 en A_n,B_n,C_n sur la troisième droite du faisceau; que par suite les droites A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n, concourent en un même point, d'après l'hypothèse admise.

Corollaire. Il suffira donc de démontrer la proposition pour le cas plus simple d'un faisceau de trois droites, et d'un système de deux points.

3. Lemme. Au lieu de considérer un système de trois droites concourant au même point, il suffit de considérer un système de trois droites parallèles.

Car étant donnée une figure plane quelconque dans laquelle n droites concourent au même point, on peut toujours projeter centralement la figure, de manière que le système des n droites concourantes soit remplacé par un système de n droites parallèles. Pour cela, il suffit en effet de prendre pour plan de projection un plan parallèle à la droite qui joint le centre de projection au point de concours des n droites. D'ailleurs, deux figures dont l'une est la projection centrale de l'autre sont telles que si dans l'une n points sont en ligne droite, les points correspondants dans l'autre seront aussi en ligne droite; si n droites concourent au même point dans l'une, les n droites correspondantes concourront au même point dans l'autre (sauf le cas particulier où l'on aurait choisi le plan de projection de telle sorte que le faisceau des n droites concourantes se transformât en un système de n droites parallèles).

(*Fig.* 6). 4. Soient M, N, P les trois droites parallèles; X_1, X_2 les deux points, et A_1, B_1 deux points pris sur M; A_2, B_2, et A_3, B_3 les points correspondants sur N et P; il suffit de prouver que le point de concours Y des droites A_1A_3, B_1B_3 est sur la droite X_1X_2, par là il sera prouvé que si l'on avait pris sur M un troisième point C_1, la droite C_1C_3 aurait passé par le point Y. Or, remarquons que les trois points X_1, X_2, Y peuvent être considérés comme les trois centres de similitude externes de deux polygones semblables pris deux à deux, construits sur les lignes A_1B_1; A_2B_2, A_3B_3 comme côtés homologues, et ayant leurs côtés parallèles. Or, trois polygones étant pris dans ces conditions, les trois centres de similitude externe de ces polygones pris deux à deux, sont, d'après un théorème connu, trois points en ligne droite ; donc ici, les trois points X_1, X_2, Y, sont en ligne droite. Donc, le théorème est démontré pour un faisceau de trois droites parallèles. Par suite, d'après les lemmes précédents, il est vrai pour un faisceau de n droites concourantes au même point, et pour un système de $n-1$ points.

Remarque. Du théorème précédent on peut déduire une démonstration d'un théorème exposé dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*. Ce théorème est le suivant. (*Fig.* 7.) D'un point fixe A pris dans le plan d'un angle yox, on mène un nombre quelconque de transversales qui déterminent des points correspondants A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2.... la droite oy restant fixe, la seconde droite ox tourne autour de oy, et emporte avec elle les points A_2, B_2, etc. ; si dans une quelconque de ses positions on mène les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2... , ces droites se couperont toujours en un même point.

(*Fig.* 8). Soit en effet ox' une nouvelle position de ox, et A_3, B_3, C_3 les points correspondants aux points A_2, B_2, C_2, de sorte que l'on ait : $oA_2 = oA_3$, $oB_2 = oB_3$, $oC_2 = oC_3$. Les droites A_2A_3, B_2B_3 et C_2C_3 seront parallèles ; et il faut démontrer que les droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 concourent en un même point.

Or faisons une projection centrale de la figure, de manière que le système des parallèles soit remplacé par un système de droites concourant en un point X_2. Représentons les projections centrales des divers points X_1, A_1,.... B_2.... par les petites lettres correspondantes, et semblablement accentuées x_1, a_1, b_2,.... dans la projection, les points a_1, b_1, c_1 placés sur la première droite du faisceau sont projetés en a_2, b_2, c_2, suivant le centre x_1 ; les points a_2, b_2, c_2 sont eux-mêmes projetés en a_3, b_3, c_3, suivant le centre x_2 ; donc, d'après le théorème de M. Finck, les droites a_1a_3, b_1b_3, c_1c_3 concourent en un même point ; donc aussi dans la figure primitive les droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 concourent au même point. C. q. f. d.

Autre remarque. Si l'on remarque que la démonstration précédente suppose seulement le parallélisme des droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, et que ce parallélisme existe encore quand l'on suppose, non que les distances oA_3, oB_3..... sont respectivement égales aux distances oA_2, oB_2, mais seulement qu'elles leur sont proportionnelles, l'on verra que l'on peut généraliser l'énoncé du théorème précédent.

Seconde partie.

1. Lemme. Déterminer le rapport des longueurs X_1Y et X_1X_2 (*fig.* 6).

Le triangle $A_2X_2X_1$ coupé par la transversale A_3A_1Y donne la relation :

$$A_2A_3 \,.\, X_2Y \,.\, X_1A_1 = X_2A_3 \,.\, X_1Y \,.\, A_1A_2,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{X_2Y}{X_1Y} = \frac{A_1A_2}{A_1X_1} \cdot \frac{A_3X_2}{A_3A_2},$$

ou bien comme les points X_1, A_1, B_1 sont fixes, le rapport $\frac{A_1A_2}{A_1X_1} = m$, quantité constante, donc

$$\frac{X_2Y}{X_1Y} = m \,.\, \frac{A_3X_2}{A_3A_2}, \text{ ou bien } \frac{X_2Y}{X_1Y} = m \,.\, \frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2};$$

d'où enfin

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y} = 1 + m \,.\, \frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2}.$$

2. Prenons le point fixe X_1 pour origine des coordonnées, et l'axe des x parallèle à la direction commune des droites A_1B_1, A_2B_2; soient X_2 [α, 6] l'une des positions particulières

du point mobile, et sur la droite X_1X_2, le point de rencontre correspondant, Y $[x, y]$; soient A_2 $[y=c, \; x=a]$, B_2 $[y=c, \; x=b]$ les points fixes et $y=d$ l'équation de la droite A_3B_3.

Cherchons l'expression de

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y} = \frac{\beta}{y} = \frac{\alpha}{x} = 1 + m\,\frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2},$$

en fonction de α, β, a, b, c et d.

On trouvera facilement (*fig.* 9) :

$$A_3B_3 = \frac{d-\beta}{\beta - c}(a-b), \quad A_2B_2 = b - a,$$

donc

$$A_3B_3 - A_2B_2 = \frac{d-c}{\beta - c}(a-b), \text{ donc } \frac{A_3B_3}{A_3B_3 - A_2B_2} = \frac{d-\beta}{d-c}.$$

On a donc :

$$\frac{X_1X_2}{X_1Y} = 1 + m\,\frac{d-\beta}{d-c} = \frac{m(d-\beta) + d - c}{d-c} = \frac{A\beta + B}{C},$$

A, B, C étant des quantités connues ; donc

$$(1)\;\frac{\beta}{y} = \frac{A\beta + B}{C}, \quad (2)\;\frac{\alpha}{x} = \frac{A\beta + B}{C},$$

d'où l'on tire :

$$(1')\;y = \frac{C\beta}{A\beta + B}, \quad (2')\;x = \frac{C\alpha}{A\beta + B}.$$

D'après ces formules, l'on voit que :

1° Si le point de rencontre Y décrit une courbe du degré m, le point X_2 décrira de même une ligne du degré m. Par suite réciproquement, etc. On pourrait d'ailleurs le voir directement en tirant des relations (1′) et (2′), les valeurs de β et α en fonction de x et y.

2° Donc, si le point variable X_2 décrit une ligne droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira de même une ligne droite ou une conique.

Or, dans ce dernier cas, pour avoir le lieu décrit par le point de rencontre dans la figure primitive (car tout ce qui précède se fait dans la projection de cette figure primitive), il suffira de projeter centralement sur le plan de la figure primitive, la droite ou la conique lieu des points de rencontre; et l'on obtiendra pareillement dans la figure primitive, une droite ou une conique pour lieu des points de rencontre.

3° Donc, si le point X_2 décrit une droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira aussi une droite ou une conique.

Généralisation du théorème précédent.

En revenant une seconde fois sur ce théorème, j'ai trouvé qu'on pouvait le généraliser ainsi qu'il suit :

1° On a un faisceau de n droites concourant en un même point o de l'espace, mais d'ailleurs situées ou non dans le même plan ; on a aussi $n-1$ points dans l'espace, assujettis seulement aux conditions suivantes : le premier point X_1 est dans le plan de la première et de la deuxième droite du faisceau ; le p^{ieme} point est dans le plan de la p^{ieme} et de la $(p+1)^{ième}$ droite ; soient $X_1, \ldots X_p, \ldots X_{n-1}$ ces points. On projette suivant X_1 les points A_1, B_1, C_1,.... de la première du faisceau, en A_2, B_2, C_2,.... sur la deuxième du faisceau ; ces derniers sont projetés suivant X_2 en A_3, B_3, C_3 sur la troisième du faisceau, ainsi de suite. Soient A_n, B_n, C_n.... les points projetés suivant X_{n-1}, sur la $n^{ième}$ du faisceau, les lignes A_1A_n, B_1B_n, C_1C_n.... concourront en un même point.

2° Si $n=3$, et si X_1 restant fixe, le point X_2 décrit dans le plan de la première et de la deuxième droite du faisceau, une droite ou une conique, le point de rencontre Y décrira de même dans le plan de la première et de la troisième droite du faisceau, une droite ou une conique.

La démonstration se ramène facilement à la précédente, en projetant toutes les droites et tous les points de l'espace, sur le plan de la première et de la $n^{ième}$ droite.

Note. Cette généralisation donne immédiatement une démonstration *intuitive* de la première partie du théorème de M. Finck. En effet, soit une pyramide de n faces triangulaires coupée par m plans passant par la même droite, on obtient m polygones de n côtés ; les m côtés qui se trouvent dans une même face se rencontrent évidemment en un même point, et les n points de rencontre sont situés sur la même droite, intersection des plans. Et réciproquement si $n-1$ de ces points de rencontre sont sur une même droite le $n^{ième}$ sera sur la même droite, en projetant la pyramide et les polygones, on obtient la propriété de *collinéation* énoncée ci-dessus. Appliquant à cette figure la méthode métamorphique (Voy. t. V, p. 497), on peut en déduire une foule d'autres propriétés ; par exemple, en projetant la figure plane (fig. 5) sur une sphère, prenant le centre pour celui de projection, les droites deviennent des grands cercles de la sphère qui jouissent des mêmes propriétés de collinéation que les droites sur un plan. Quant à la seconde partie du théorème, elle est une conséquence du théorème généralisé de Braikenridge que M. Poncelet a traité avec une grande étendue, trop grande peut-être. En général, on remarque chez les écrivains qui s'occupent exclusivement de géométrie moderne, sans en excepter l'illustre Carnot, une tendance à une extrême prolixité. Ils se complaisent à accumuler propriétés sur propriétés, théorèmes sur théorèmes, tant et tant, qu'à la fin, comme dit un proverbe allemand, *les arbres empêchent de voir la forêt*.