

OSSIAN BONNET

**Note sur le nombre de racines réelles  
contenues entre des limites données, à  
l'aide du théorème de Descartes**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 464-469

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_464\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__464_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

NOTE

*sur le nombre de racines réelles contenues entre des limites données, à l'aide du théorème de Descartes (Question 174, p. 455).*

**PAR M. OSSIAN BONNET,**  
Répétiteur à l'École Polytechnique.

—

On sait que le théorème de Descartes fait connaître immédiatement une limite supérieure du nombre des racines

réelles positives d'une équation, et même le nombre exact de ces racines quand l'équation n'a aucune racine imaginaire. Le même théorème, appliqué à la transformée en  $-x$  d'une équation, peut aussi donner une limite supérieure ou le nombre exact, dans le cas de la réalité de toutes les racines, du nombre des racines réelles négatives de cette équation. C'est ce que l'on montre dans tous les traités d'algèbre; mais ce qui n'est pas suffisamment connu, c'est qu'on peut déduire du seul théorème de Descartes une limite supérieure du nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux nombres donnés  $a$  et  $b$ , et même le nombre exact de ces racines quand l'équation proposée n'a aucune racine imaginaire; or il suffit pour cela de considérer la transformée en  $y = \frac{a-x}{x-b}$ , qui évidemment a autant de racines réelles positives que la proposée en a de comprises entre  $a$  et  $b$ . Cette remarque, que l'on doit à M. Jacobi (\*), est d'une grande importance. On voit, en effet, qu'elle permet dans un grand nombre de cas d'éviter l'emploi du théorème de M. Sturm; du reste la transformée en  $y$  a une forme assez simple: en effet, de  $y = \frac{a-x}{x-b}$  on tire  $x = \frac{by+a}{y+1} = b + \frac{a-b}{y+1}$ , et si  $f(x) = 0$  est l'équation proposée, on obtient pour la transformée

$$\begin{aligned}
 & y^n f(b) + y^{n-1} \left[ \frac{n}{1} f'(b) + f''(b)d \right] + \\
 & y^{n-2} \left[ \frac{n(n-1)}{2} f''(b) + \frac{(n-1)}{1} f'(b)d + \frac{f''(b)}{1.2} d^2 \right] + \\
 & y^{n-3} \left[ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} f'''(b) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} f''(b)d + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n-2}{1} \cdot \frac{f''(b)}{1.2} d^2 + \frac{f'''(b)}{1.2.3} d^3 \right] + \dots = 0;
 \end{aligned}$$

$n$  étant le degré de l'équation, et  $d$  la différence  $a - b$ .

---

(\*) Crelle, XIII, 340, 1835.

Une autre remarque que j'ai consignée il y a quelques années dans les tableaux polytechniques publiés par M. Blum, c'est que lorsque l'équation proposée n'a pas de racines égales, si l'on suppose  $a$  et  $b$  suffisamment rapprochés l'un de l'autre,

la transformée en  $y = \frac{a-x}{x-b}$  finit par se trouver dans l'un de

ces deux cas : ou de ne plus avoir que des permanences, ou de ne plus avoir qu'une variation; de là résulte que le théorème de Descartes ou plutôt la conséquence que M. Jacobi en a déduite, suffit pour conduire d'une manière complète à la séparation des racines; pour cela étant donnée une équation  $f(x) = 0$ , on prend tous les nombres entiers compris entre les limites extrêmes de l'équation, et  $n$  et  $n+1$  étant deux consécutifs de ces nombres, on cherche par la trans-

formée en  $y = \frac{n+1-x}{x-n}$  combien ils comprennent au plus

de racines réelles; supposons que l'on trouve  $k$ , on prend  $\alpha < 1$  d'une manière quelconque et on cherche de même combien il y a au plus de racines entre  $n$  et  $n+\alpha$ , et entre  $n+\alpha$  et  $n+1$ ; supposons que l'on trouve  $k'$  pour les deux limites  $n$  et  $n+\alpha$ , on prend  $\alpha' < \alpha$  d'une manière quelconque et on cherche de même combien il y a au plus de racines entre  $n$  et  $n+\alpha'$ , et entre  $n+\alpha'$  et  $n+\alpha$ ; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur une

transformée en  $y = \frac{a-x}{x-b}$  qui ne présente que des permanences ou une seule variation, auxquels cas les deux limites  $a$  et  $b$  ne comprennent aucune racine réelle, ou en comprennent une seule.

Quant à la propriété de la transformée en  $y = \frac{a-x}{x-b}$ , d'après laquelle  $a$  et  $b$  étant suffisamment rapprochés, le nombre des variations du premier membre est 0 ou 1, on

l'établit simplement comme il suit : faisons  $a = b + \delta$ , ce qui donne  $y = -1 + \frac{\delta}{x-b}$ , et supposons d'abord que les deux limites  $a$  et  $b$  ne comprennent aucune racine réelle de l'équation, je dis que si  $\delta$  est suffisamment petit, toutes les racines de la transformée en  $y$  différeront aussi peu qu'on voudra de  $-1$ , le degré de petitesse de la différence entre les racines et  $-1$  étant mesuré dans le cas où ces racines sont imaginaires par celui du module de cette différence. En effet, considérons d'abord les valeurs de  $y$  qui correspondent aux valeurs réelles de  $x$  et qui sont évidemment réelles. Si nous désignons par  $\varepsilon$  un nombre positif et déterminé plus petit, 1° que toutes les différences obtenues en retranchant  $a$  successivement de toutes les racines réelles de l'équation proposée qui sont supérieures à  $a$ , et 2° que toutes les différences obtenues en retranchant de  $b$  successivement toutes les racines inférieures à  $b$ , les valeurs de  $y$  considérées différeront de  $-1$  de moins que  $\frac{\delta}{\varepsilon}$ ; or  $\delta$  finit par devenir aussi petit que l'on veut quand on resserre les limites. D'ailleurs  $\varepsilon$  peut être supposé constant, donc les valeurs réelles de  $y$  finissent par être constamment aussi peu différentes de  $-1$  qu'on le veut. Donnons maintenant à  $x$  les valeurs imaginaires; soit  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  l'une de ces valeurs, la valeur correspondante de  $y$  sera  $y = -1 + \frac{\delta}{\alpha - b + \beta\sqrt{-1}}$ . Or, si on appelle  $\varepsilon'$  un nombre déterminé et positif plus petit que la valeur absolue de tous les coefficients de  $\sqrt{-1}$  dans les racines imaginaires de l'équation proposée, la différence qui existera entre la valeur de  $y$  considérée et  $-1$  aura un module plus petit que  $\frac{\delta}{\varepsilon}$ . Or  $\frac{\delta}{\varepsilon}$  peut devenir aussi petit qu'on le voudra en resserrant suffisamment les limites  $a$  et  $b$ ; donc les va-

leurs imaginaires de  $y$ , comme les valeurs réelles, finissent par être constamment aussi peu différentes de  $-1$  qu'on le veut; on conclut aisément de là, en se rappelant les relations qui existent entre les coefficients et les racines d'une équation, et les propriétés élémentaires des modules des expressions imaginaires, que les coefficients de la transformée en  $y$  finissent par être constamment aussi peu différentes qu'on le veut de ceux d'une équation qui a toutes ses racines égales à  $-1$ , c'est-à-dire de  $(y+1)^m = 0$  ( $m$  est le degré de l'équation proposée, et, par suite, de la transformée). D'ailleurs cette dernière équation n'a évidemment que des permanences; donc lorsque  $a$  et  $b$  se rapprochent indéfiniment en ne comprenant aucune racine de l'équation proposée, la transformée en  $y = \frac{a-x}{x-b}$  finit par ne plus avoir de variations.

Supposons maintenant que  $a$  et  $b$ , en se rapprochant, comprennent toujours une et une seule racine réelle de l'équation proposée, je dis que la transformée en  $y$  finira par avoir constamment une seule variation; en effet, dans ce cas, nous avons toujours dans la transformée en  $y$  une racine réelle positive, c'est celle qui correspond à la valeur de  $x$  comprise entre  $a$  et  $b$ ; et quant aux  $(m-1)$  autres racines, elles se rapprochent indéfiniment de  $-1$ , comme dans l'autre cas, de manière à en différer d'aussi peu que l'on veut; supposons  $a$  et  $b$  assez près l'un de l'autre et le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces dernières racines assez peu différent de  $(y+1)^{m-1}$ , pour que dans ce produit les coefficients soient 1° positifs, et 2° tels que le rapport de l'un quelconque d'entre eux au précédent aille toujours en diminuant à mesure qu'il se rapporte à un terme de rang plus élevé, propriétés qui ont lieu, comme l'on sait, dans  $(y+1)^{m-1}$ . Je dis qu'à partir de ce moment la transformée en  $y$  ne présentera qu'une variation; en effet, soit

$$\varphi(y) = y^{m-1} + A_1 y^{m-2} + A_2 y^{m-3} + \dots + A_{m-2} y + A_{m-1};$$

le produit des facteurs du premier degré correspondants aux valeurs de  $y$ , très-peu différentes de  $-1$ , et  $\alpha$  la valeur positive de  $y$  qui correspond à la valeur de  $x$ , comprise entre  $a$  et  $b$ ; si nous multiplions  $\varphi(y)$  par  $y - \alpha$ , le produit

$$\begin{array}{c} y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots - A_{m-1} \alpha \\ - \alpha \left| \begin{array}{c} y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots - A_{m-1} \alpha \\ - A_1 \alpha \end{array} \right| \end{array}$$

sera le premier membre de la transformée en  $y$ . Or ce polynôme a au moins une variation, puisque les termes extrêmes ont des signes contraires; du reste il n'en a pas plus d'une, car si  $A_n - A_{n-1} \alpha$  est le premier coefficient négatif de ce

polynôme, on aura  $\alpha > \frac{A_n}{A_{n-1}}$ , mais

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > \frac{A_{n+1}}{A_n} > \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}, \dots > \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

donc on aura aussi

$$\alpha > \frac{A_{n+1}}{A_n}, \alpha > \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}, \dots \alpha > \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

ou bien

$$A_{n+1} - A_n \alpha < 0, A_{n+2} - A_{n+1} \alpha < 0, \dots A_{m-1} - A_{m-2} \alpha < 0;$$

ce qui prouve que tous les coefficients qui suivent le premier coefficient négatif sont aussi négatifs, et par conséquent que le polynôme ne présente qu'une variation; nous arrivons ainsi au résultat énoncé.

Je dois dire, en terminant, que la démonstration qui précède est analogue à celle que M. Vincent a employée pour prouver que le théorème de Fourier conduit toujours à la séparation des racines, lorsque le rapprochement des limites se fait par la méthode de Lagrange. (Liouville, I, 341, 1836.)