NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE PERRODIL

Question 144

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 431-434

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__431_1>

QUESTION 144 (p. 216).

PAR M. DE PERRODIL,
élève du collége de la Flèche.

Étant donnés deux ellipsoïdes semblables, concentriques, et ayant leurs axes principaux homologues dans la même direction, tout cylindre circonscrit au petit ellipsoïde coupe le volume du grand dans un rapport simple qu'il s'agit de trouver (Lebesgue).

Je mène et le plan xy qui contient la courbe de contact, et le diamètre oz parallèle aux génératrices du cylindre; il contient les centres de toutes les sections parallèles au plan xy. En effet, tout plan conduit suivant cette droite coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse; le cylindre suivant deux génératrices tangentes à cette courbe et le plan xy suivant un diamètre passant par les points de contact, alors tout plan parallèle à ce dernier détermine une corde parallèle au conjugué de oz, et qui, par conséquent, a son milieu sur oz. D'ailleurs le cylindre perce le grand ellipsoïde suivant deux ellipses parallèles au plan xy; car toutes les sections horizontales se projettent parallèlement à oz suivant des courbes semblables à la courbe de contact; cela résulte immédiatement de l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Quel que soit z, le rapport des coefficients de x^2 et y^2 est constant.

Considérons actuellement le demi-ellipsoïde situé au-dessus du plan xy, et relevons les ordonnées parallèles à oz de manière à les rendre perpendiculaires à ce plan; alors un cylindre, ayant pour base une partie quelconque mais infiniment petite du plan xy, sera multiplié par $\frac{1}{\sin p}$, p étant l'inclinaison de oz sur le plan xy, leur somme ou le volume compris entre la surface cylindrique et celle du grand ellipsoïde sera multipliée dans le même rapport; appelons X ce volume, V le volume modifié, on aura

$$\mathrm{V}=\mathrm{X}\frac{1}{\sin p}.$$

Soient c' le demi-diamètre du grand ellipsoïde dirigé suivant oz, a, b, les demi-axes de la courbe du plan xy, et considérons l'ellipsoïde E, dont les axes seraient a, a', c.

Si l'on décrit un cercle sur $2a'$ comme diamètre, et si l'on mène le cylindre droit B ayant ce cercle pour base, il interceptera dans l'ellipsoïde E un volume dont il est facile de trouver le rapport avec V.

Appelons l'axe b prolongé indéfiniment l'axe des y. Les y du grand ellipsoïde et de la surface auxiliaire E sont dans le rapport constant de a à b ; donc, si l'on mène un petit cylindre parallèle à l'axe oy, qui coupe un élément sur chaque surface, les cylindres qui projetteront ces éléments sur le plan xy auront des bases dans le rapport de a à b et même hauteur ; donc ils seront eux-mêmes $:: a : b$, donc il en sera de même de leur somme. En les appelant V et V' on aura

$$V' = \frac{a}{b} V = \frac{1}{b \sin p} X.$$

Enfin, si sur a, comme diamètre, on décrit une sphère, le cylindre auxiliaire B déterminera dans cette sphère un autre volume V'', dont le rapport à V' est facile à trouver, car les ordonnées comprises dans les deux surfaces sont dans le rapport de a à c. Deux petits cylindres ou prismes, ayant la même base et terminés à ces deux surfaces, sont dans le même rapport, donc

$$V'' = \frac{a}{c} V' = \frac{a}{c'} \frac{a}{b \sin p} X ; \; V'' = \frac{a^3}{abc' \sin p}.$$

Soient a', b' les demi-diamètres conjugués de c', on sait que

$$ab = a'b' \sin\alpha ; \text{ donc } V'' = \frac{a^3}{a'b'c' \sin\alpha \sin p} X.$$

Mais $a'b'c' \sin\alpha \sin p$ n'est autre chose que le volume du parallélipipède construit sur les trois demi-diamètres a', b', c', et l'on sait que ce volume est constant et égal à ABC, A, B, C étant les axes principaux de l'ellipsoïde ;

donc
$$V'' = \frac{a^3}{\text{ABC}} X,$$

mais
$$V'' = \frac{1}{6} \pi \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}} a^3.$$

k étant le rapport de similitude (c'est l'expression du volume d'un segment circulaire tournant autour du diamètre parallèle à sa corde, le rayon étant représenté par a et l'apothème par ka), il viendra donc

$$\frac{a^3}{\text{ABC}} X = \frac{1}{6} \pi \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}} a^3,$$

ou
$$\frac{X}{\pi \text{ABC}} = \frac{1}{6} \left[1 - k^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Note. Si l'élève distingué auquel les *Nouvelles Annales* doivent tant de solutions remarquables n'a pas fait ici usage des symboles abréviateurs du calcul infinitésimal, c'est sans doute pour ne pas sortir de la voie collégiale ordinaire.

Tm.