

Questions d'examen. Sur le mouvement uniforme ; droites et cercles

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 401-406

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__401_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN ;

Sur le mouvement uniforme ; droites et cercles.

—

DROITES.

I. Deux molécules décrivent chacune une droite, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données ; on connaît aussi les positions simultanées des deux mobiles à un instant déterminé ; il faut chercher les positions des deux mobiles lorsque leur distance est un minimum.

Solution. v = vitesse du premier mobile ; v' = vitesse du second mobile ; l = plus courte distance des deux droites ; A et A', deux points où se trouvent les deux mobiles à un instant déterminé ; N et N', deux points où se trouvent les mobiles après le temps t , compté depuis le dé-

part de la position A, A'; faisons AI = b, A'I' = b'; NN' = z;

on a $IN = b + vt$; $I'N' = b' + v't$;

$$z^2 = (vt + b)^2 + (v't + b')^2 - 2(vt + b)(v't + b') \cos \gamma + d^2;$$

où γ est l'angle des deux droites.

Faisons $z^2 = At^2 + Bt + C$; $A = v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \gamma$;

$$B = 2v(b - b' \cos \gamma) + 2v'(b' - b \cos \gamma) \quad C = b^2 + b'^2 - 2bb' \cos \gamma + d^2;$$

A est le carré de la résultante des deux vitesses, prises suivant leurs directions; C est le carré de la distance AA'.

On a aussi $z^2 = A \left(t + \frac{B}{2A} \right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}$; ainsi z^2 est au minimum lorsque $t = -\frac{B}{2A}$.

DISCUSSION.

1° $d > 0$; alors z ne peut jamais être nul; donc

$$4AC - B^2 > 0; \quad z = \sqrt{\frac{4AC - B^2}{4A}}$$

donne la distance minimum; et pour ce cas $IN = b - \frac{Bv}{2A}$; $I'N' = b' - \frac{Bv'}{2A}$;

les signes de b , b' , v , v' déterminent le signe de B, et par conséquent les positions des points N et N' relativement aux points I et I'.

En développant $4AC - B^2$, on trouve :

$$4AC - B^2 = 4 \sin^2 \gamma [bv' - b'v]^2 + d^2 [v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \gamma],$$

où l'on voit qu'en effet $4AC - B^2$ est essentiellement positif.

Si $\gamma = 0$, les droites sont parallèles; de même, si $\gamma = 2^a$. C'est le problème des *courriers*, selon qu'ils vont dans le même sens ou dans des sens opposés. On suppose ordinairement $d = 0$;

2° $d=0$; les droites sont dans un même plan ; et au cas du minimum ,

$$z = \frac{1}{\sqrt{A}}(bv' + b'v).$$

II. La droite NN' décrit un hyperboloïde parabolique , et lorsque les deux droites sont dans un même plan , l'enveloppe de la droite NN' est une parabole (Voy. t. I, p. 449) ; cette parabole est tangente aux deux droites données et à la droite AA' : il suffit donc de connaître encore deux autres positions simultanées , pour que la parabole soit entièrement déterminée.

III. Le lieu du milieu de NN' est une droite, car le centre de gravité des deux mobiles décrit une droite (t. II, p. 241), d'où l'on déduit ces deux théorèmes :

Théorème 1. Une parabole étant inscrite dans l'angle MIM' ; M et M' étant les points de contact , le lieu du milieu d'une portion de tangente quelconque à la parabole interceptée dans l'angle est une droite passant par les milieux de IM et de IM'.

Théorème 2. Une conique étant inscrite dans l'angle MIM' , M et M' étant les points de contact , si l'on mène une troisième tangente parallèle à MM' , rencontrant IM en N et IM' en N' , prenant sur IM un point O , tel que les quatre points M , N , I , O soient harmoniques ; de même un point O' sur la droite IM' , une quatrième tangente quelconque rencontrera les trois tangentes et la droite OO' en quatre points harmoniques.

Ce théorème est une conséquence perspective du précédent.

IV. *Problème.* Trois mobiles parcourant trois droites d'un mouvement uniforme , avec des vitesses données et des positions initiales données , trouver les positions où l'aire du triangle ayant pour sommet les trois mobiles , est un minimum.

Solution. Même notation que dessus; soient z, z', z'' , les côtés du triangle et u son aire; on a :

$$u^2 = 16 [2z^2z'^2 + 2z^2z''^2 + 2z'^2z''^2 - z^4 - z'^4 - z''^4] ;$$

remplaçant z^2, z'^2, z''^2 , etc., par leurs valeurs en fonction de t on obtient $u^2 = Mt^4 + Nt^3 + Rt^2 + St + P$; lorsque le second membre peut devenir nul, alors les trois mobiles peuvent être sur la même droite; ce cas-là excepté, le second membre égalé à 0 ne peut avoir de racines réelles et M et N sont de même signe; il est d'ailleurs évident, en faisant le calcul, que M et N sont essentiellement positifs. Pour trouver les valeurs extrêmes de u , on a l'équation $4Mt^3 + 3Nt^2 + 2Rt + S = 0$, équation qui a toujours au moins une racine réelle; il reste ensuite à discuter si l'on obtient un maximum ou un minimum.

V. Dans le cas de quatre mobiles, on peut se proposer de trouver les positions des quatre mobiles tels que, formant les sommets d'un tétraèdre, le volume de ce tétraèdre soit un maximum ou un minimum, on parvient à une équation du 5^{ème} degré.

CERCLES.

VI. Soit A le point de départ du mobile, et X le centre, T le nombre d'unités de temps qu'il met à parcourir les quatre quadrants d'une vitesse uniforme, $V = \frac{4^q}{T}$, la vitesse angulaire; $\theta = nT + t$, le temps exprimé en unités de temps, où n est un nombre entier positif et t un nombre plus petit que T; E étant l'espace angulaire parcouru, on aura évidemment $E = n4^q + Vt$ (1).

Soit maintenant une seconde circonférence, dans le plan de la première; nous désignons les quantités analogues par les mêmes lettres accentuées, et soit α l'angle que font les deux rayons menés aux mobiles lors de leur départ simul-

tané, l'un de A, l'autre de A'; au bout du temps θ , on a évidemment $\theta = nT + t = n'T' + t'$ (2), et l'angle que formeront alors les deux rayons sera $\alpha \pm Vt \pm V't'$, en donnant aux vitesses les signes convenables. D'après cette formule, on peut résoudre les diverses questions qu'on peut proposer sur ce genre de mouvement. Si les rayons partent du parallélisme, on a $\alpha = 0$; par exemple, si l'on demande après quel temps les rayons feront un angle égal à b , on aura $b = \alpha \pm Vt \pm V't'$; ensuite il faut avoir égard à l'équation indéterminée (2) qui donnera le nombre de solutions périodiques.

VII. Deux mobiles parcourent d'un mouvement uniforme deux circonférences situées dans le même plan, on demande quand leur distance sera un maximum ou un minimum.

Solution. Soient O et O' les centres des deux circonférences, et M et M' les positions simultanées des deux mobiles; $OO' = d$, $MO = r$ et $M'O' = r'$; $MOO' = \varphi$; $MO'O' = \varphi'$, on aura :

$$(d - r \cos \varphi - r' \cos \varphi')^2 + (r \sin \varphi - r' \sin \varphi')^2 = MM'^2.$$

Or, d'après ce qui précède, φ et φ' sont donnés en fonction de t ; on pourra donc trouver l'équation de condition pour qu'il y ait maximum ou minimum.

VIII. Lorsqu'on a plusieurs circonférences situées dans un même plan et décrites par des mobiles d'un mouvement uniforme, étant données les positions initiales des rayons, on pourra trouver les positions de ces mêmes rayons après un temps donné, et résoudre les problèmes sur les positions de ces rayons.

IX. Lorsque tous ces cercles sont concentriques, on a le problème du cadran. La question suivante a été proposée cette année aux examens de Paris : Les trois aiguilles, celle des heures, des minutes et des secondes, étant sur midi, on

demande quand l'une de ces aiguilles sera la bissectrice de l'angle formé par les deux autres. Nous engageons les élèves à prendre des exemples numériques et à discuter soigneusement les signes des vitesses et la position des rayons ; si l'on voulait le faire pour le cas général, cela entraînerait à trop de longueurs ; nous avons indiqué les moyens de solution. (Voir t. V, p. 35.)

Tm.
