

MENTION

Solution des questions 149, 163 et 164

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 370-372

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__370_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DES QUESTIONS 149 (p. 241), 163 (p. 272)
et 164 (p. 328).

PAR M. MENTION,
élève du collège Louis le Grand.

Je m'appuierai sur ce théorème bien connu :

« Si quatre points d'une ellipse sont sur un même cercle, les côtés opposés du quadrilatère qu'ils forment sont également inclinés sur les axes. » La réciproque est vraie. (*Voyez* Géométrie de Bobilier, lignes courbes, première section, prop. 6.)

Je vais en effet prouver que les droites AB et CD sont également inclinées sur les axes, toutefois après avoir établi quelques lemmes préliminaires.

I. Équations donnant les coordonnées des pieds des normales.

Les résultats de l'élimination de x , puis de y entre les deux équations $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $b^2\beta x - a^2ay + c^2xy = 0$, sont :

$$c^4y^4 + 2b^2\beta y^3 + b^2y^2(a^2\beta^2 + b^2a^2 - c^4) - 2b^4c^2\beta y - b^6\beta^2 = 0,$$

$$c^4x^4 - 2a^2x^3 + a^2x^2(a^2\beta^2 + b^2a^2 - c^4) - 2a^4c^2ax - a^6a^2 = 0,$$

résultats qui mettent en évidence la dernière partie des propriétés énoncées (Question 163). La première partie est mise en évidence par l'équation $b^2\beta x - a^2xy + c^2xy = 0$; car de ces équations on tire que les coordonnées du centre des moyennes distances sont

$$-\frac{b^2\beta}{2c^2}, \frac{a^2a}{2c^2}.$$

D'ailleurs celles du centre de l'hyperbole équilatère sont

$$-\frac{b^2\beta}{c^2}, \frac{a^2\alpha}{c^2}, \text{ etc., etc.}$$

II. Coefficient angulaire d'une corde de l'hyperbole équilatère.

$(x'y')$ ($x''y''$) étant les extrémités de cette corde, le coefficient est

$$\frac{a^2\alpha y' y''}{b^2\beta x' x''}.$$

Si les points sont des pieds de normales, on a la relation

$$-\frac{b^2}{a^2} \frac{x' + x''}{y' + y''} = \frac{a^2\alpha y' y''}{b^2\beta x' x''}.$$

III. Actuellement soient $(x_i^A y_i')$ $(x_i^B y_i'')$ $(x_i^C y_i)$ $(x_i^D y_i)$ les pieds des normales, il s'agit de prouver que les coefficients de AB et CD sont égaux et de signes contraires, et que

$$-\frac{b^2(x' + x'')}{a^2(y' + y'')} = +\frac{b^2}{a^2} \frac{(x_1 + x_2)}{y_1 + y_2} \text{ ou } \frac{x' + x''}{y' + y''} = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2},$$

or

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{(x_1 + x_2)}{(y_1 + y_2)};$$

il reste donc à prouver qu'on a

$$\frac{x' + x''}{y' + y''} = \frac{a^2}{b^2} \frac{(y_1 + y_2)}{(x_1 + x_2)} \text{ ou } \frac{b^2(x' + x'')}{a^2(y' + y'')} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

Mais la relation n° II permet de substituer à chacun des deux membres les suivants :

$$\frac{a^2\alpha y' y''}{b^2\beta x' x''} \text{ et } +\frac{b^2\beta x_1 x_2}{a^2\alpha y_1 y_2},$$

en sorte que définitivement la démonstration du théorème dépend de celle de l'égalité :

$$\frac{a^2 y' y''}{b^4 x' x''} = \frac{b^4 \beta x, x_2}{a^4 \gamma, \gamma_2}$$

Or $a^6 a^2 y' y'' \gamma, \gamma_2 = b^6 \beta^2 x, x_2 x' x''$, qui est rendue évidente par ce qui a été indiqué au n° I.
