TERQUEM

Problème de Malfatti. Solution géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 346-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__346_1>

PROBLÈME DE MALFATTI.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Démonstration de la solution du problème de Malfatti, donnée par M. Steiner, p. 178 du tome I, cah. II (*Crelle*); *par M. Zornow, professeur au collége de Kneiphof, à Kœnigsberg*. (Crelle, X, p. 300, 1833, en français.)

On trouve dans le tome I de ce journal une construction très-remarquable du problème suivant, connu sous le nom du problème de Malfatti : A un triangle donné quelconque, inscrire trois cercles de manière que chacun d'eux touche extérieurement les deux autres, et deux côtés du triangle. Cette construction, également distinguée par sa simplicité et son élégance, n'a pas été démontrée par son auteur, et à ce que je sache, nulle démonstration n'en a été publiée depuis ce temps-là. C'est ce qui me fournit l'occasion de communiquer aux géomètres la démonstration suivante, qui me paraît assez simple pour mériter leur indulgence.

Commençons par quelques considérations connues.

1. Soient (*fig.* 50) a et b deux cercles (*) qui se touchent extérieurement par leur point de contact z; menons une tangente commune $z\,w''$. Soit $u''\,v''$ une autre tangente, qui rencontre la première au point w'', on aura :

$$w''\,u'' = w''\,v'' = w''\,z = \sqrt{(a\,b)}.$$

2. Étant mené par u'' et v'' un troisième cercle quelconque c_1 (**), qui coupe a et b dans deux autres points y et x, la droite $c_1\,w''$ sera perpendiculaire à la droite $u''v''$. En même temps la droite $u''y$ sera perpendiculaire à la droite $a\,c_1$, qui joint les centres des deux cercles a et c_1.

3. Les cercles a et b peuvent être touchés dans les points y et x par un même cercle c.

4. Soit A' le point de rencontre des deux droites $a\,c_1$ et $u''\,v''$ prolongées convenablement, la droite A'y touchera le cercle a au point y, et par suite aussi le cercle c dans le même point.

5. Soit décrit du centre c_1 un second cercle, qui touche $u''\,v''$ au point w'' (***). Le point A' sera le point de similitude extérieur des deux cercles a et c_1, donc la droite A'y touchera aussi le cercle c_1.

6. Réciproquement la tangente $y\,t$ commune aux cercles a et c_1 menée par leur point de contact y, touche le cercle c_1. De la même manière, on prouve que la tangente $x\,s$, com-

(*) Nous désignerons, pour abréger, le cercle, son centre et son rayon par la même lettre de l'alphabet.

(**) Ce cercle n'est pas construit dans la figure, pour ne pas la rendre trop compliquée.

(***) C'est ce cercle et son rayon c_1w'', que nous désignerons désormais par c_1.

mune aux cercles b et c, menée par leur point de contact x, touche le cercle c_1.

7. Les droites $z\,w''$, $x\,s$, $y\,t$ se coupent dans un point unique P, que l'on peut regarder comme le centre du cercle inscrit au triangle $a\,b\,c$. D'où suit :

$$z\,\mathrm{P} = x\,\mathrm{P} = y\,\mathrm{P} = \sqrt{\left(\frac{a\,b\,c}{a+b+c}\right)}.$$

8. Le point P étant le point de similitude intérieur des deux cercles c_1 et c, les trois points c_1, P, c, sont sur une même droite, et par suite les deux triangles $c\mathrm{P}x$ et $c_1\mathrm{P}s$ sont semblables. On tire de là :

9. $\mathrm{P}\,x : sx = c : c_1 + c$; ou $\sqrt{\left(\frac{a\,b\,c}{a+b+c}\right)} : \sqrt{(ab)} = c : c_1 + c$;

d'où vient : $c_1 + c = \sqrt{c\,(a+b+c)}$, ou bien $c_1^2 = c\,(a+b-2c_1)$.

10. Soit $a\,s'$ la tangente menée du point a au cercle c_1, on a :

$$(a\,s')^2 = (a\,c_1)^2 - c_1^2 = (a - c_1)^2 + a\,b - c_1^2 = a\,(a + b - 2c_1) = \frac{a}{c}\,c_1^2.$$

11. Soit $u'\,v'$ une tangente extérieure commune aux cercles a et c, et qui ne rencontre pas le troisième b ; si elle coupe la droite $\mathrm{P}\,y$ au point w', on a, comme ci-dessus (1) : $w'\,u' = w'\,v' = w'\,y = \sqrt{(a\,c)}$, et par conséquent :

$$\frac{c_1\,s'}{a\,s'} = \frac{u'\,w'}{u'\,a} = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

On voit par là que les deux triangles rectangles $c_1\,a\,s'$ et $w'\,a\,u'$ sont semblables, d'où suit : $\angle\, c_1\,a\,s' = \angle\, w'\,a\,u'$.

12. Soit A le point de rencontre des deux droites $u'v'$, $u''v''$, le cercle a étant inscrit au triangle $\mathrm{A}\mathrm{A}'\,w'$, on a toujours :

$$\angle\, w'\,a\,u' + \angle\, \mathrm{A}\,a\,\mathrm{A}' = 2\,\mathrm{R}.$$

On aura donc aussi :

$$\angle\, \mathrm{A}'\,a\,s' + \angle\, \mathrm{A}\,a\,\mathrm{A}' = 2\,\mathrm{R}.$$

On voit par là que les droites Aa et as' se confondent en une droite unique, c'est-à-dire : la droite Aa, qui divise en deux parties égales l'angle A formé par les deux droites $u'v'$ et $u''v''$, touche en même temps le cercle c_1.

13. Soit de plus uV tangente commune extérieure aux cercles b et c, et qui ne rencontre pas le troisième cercle a; soient B et C ses points de rencontre avec les droites $u''v''$ et $u'v'$, on prouve de la même manière que la droite BC touche le cercle c. Donc un triangle ABC étant circonscrit aux trois cercles a, b, c, de manière que chacun de ses côtés touche extérieurement deux de ces cercles, si l'on partage les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO, le cercle c_1 sera inscrit au triangle ABO.

14. Réciproquement le cercle c_1 inscrit au triangle ABO, est touché de deux des trois tangentes aP, yP, zP, menées aux cercles a, b, c par leurs points de contact communs a, y, z, et touche en même temps le côté AB au même point w'', auquel il est rencontré par la troisième tangente Pz.

15. Soient de plus a_1 et b_1 les cercles inscrits aux deux autres triangles BCO et CAO, on prouve de la même manière qu'ils sont touchés respectivement des droites y_1P, zP, et des droites zP, xP. Donc du point w'', auquel le cercle c_1 touche le côté AB, on peut mener une tangente Pz commune aux quatre cercles a, b, a_1, b_1, et qui touche en même temps les deux premiers à leur point de contact commun.

16. Étant donné le triangle ABC, si l'on cherche les trois cercles a, b, c, déterminés de manière que chacun d'eux touche les deux autres et en même temps deux des côtés du triangle ABC, on partagera en premier lieu les angles A, B, C en deux parties égales au moyen des droites AO, BO, CO; après cela étant inscrits aux triangles BCO, CAO, ABO les cercles a_1, b_1, c_1 dont le dernier touche AB au point w'', si l'on mène

du point w' une tangente au cercle a_1 tellement choisie qu'elle touche en même temps le cercle b_1, ce qui est toujours possible, elle touchera aussi deux des cercles cherchés a et b, qui sont par là entièrement déterminés. Par une construction semblable on trouve le troisième cercle c.

La construction précédente du problème de Malfatti est précisément celle qui a été donnée par M. Steiner à l'endroit cité.

Kœnigsberg, le 30 octobre 1832.

Note. M. Plücker a donné aussi une solution synthétique de ce problème (*Crelle*, XI, p. 117, 1834) et même une solution de ce problème général, résolu d'abord par M. Steiner : étant donnés trois cercles, décrire trois nouveaux cercles dont chacun touche les deux autres et deux des trois cercles donnés (*Crelle*, XI, p. 356). Il serait à désirer que M. Finck voulût bien nous faire connaître complétement la méthode si féconde du symbolisme et des coefficients indéterminés appliqués à la géométrie et dont M. Plücker a déduit de si beaux théorèmes (*Voir* t. III, p. 147, 401, 573, et t. V, p. 60).