

E. DE BOUTEILLER

**Discussion de la courbe représentée par
l'équation $x^2y^2 - \ell^2(y^2 + x^2 - 2xy \cos \theta) = 0$,
 θ étant l'angle des axes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 263-268

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_263_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISCUSSION

de la courbe représentée par l'équation

$$x^2y^2 - l^2(y^2 + x^2 - 2xy \cos \theta) = 0,$$

θ étant l'angle des axes.

PAR M. E. DE BOUTEILLER,

Elève de l'Institution de Reusse.

(Fig. 46.) Une remarque fort importante, et que l'on peut faire à la simple inspection de l'équation, consiste dans la parfaite symétrie des variables, qui est mise en relief par la forme

$$y^2x^2 + 2xy l^2 \cos \theta - l^2(x^2 + y^2) = 0,$$

sous laquelle on peut mettre l'équation. Cette propriété indique que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, et par là la construction de la courbe se simplifiera beaucoup.

Tous les termes de l'équation étant de même parité, on reconnaît tout d'abord que la courbe a un centre et qu'elle est rapportée à ce centre. Ce point appartient au lieu, car l'équation est satisfaite par ses coordonnées; mais la forme que nous trouverons pour la courbe fera voir aisément que c'est un point singulier.

Passons maintenant à la détermination de la forme de cette courbe. En résolvant l'équation par rapport à y , on trouve :

$$y = \frac{-l \cos \theta x^2 \pm \sqrt{l x^2 \cos^2 \theta + l^2 x^2 (x^2 - l^2)}}{x^2 - l^2}$$

$$y = \frac{-l x^2 \cos \theta \pm l x \sqrt{l^2 \cos^2 \theta + x^2 - l^2}}{x^2 - l^2}$$

$$y = \frac{l x - l \cos \theta \pm \sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta}}{x^2 - l^2}.$$

La discussion sera plus facile en mettant cette expression sous une autre forme. J'emploie, pour la transformer, l'artifice connu qui consiste à multiplier la somme des deux quantités dont on a la différence :

$$y = \frac{lx}{l \cos \theta \pm \sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta}}.$$

La condition de réalité des valeurs de y est que l'on ait $x^2 - l^2 \sin^2 \theta > 0$, ou $x > l \sin \theta$; si donc on construit une ligne $OA = l \sin \theta$, et que par le point A on mène une parallèle à l'axe des y , on est sûr que tous les points de la courbe sont situés au delà de cette ligne. En égalant à 0 le dénominateur, on a une valeur de y infinie; donc $x = l$ est une asymptote de la courbe. Voyons où la courbe rencontre la ligne AA' , c'est-à-dire cherchons la valeur de y correspondant à l'hypothèse $x = l \sin \theta$. Cette hypothèse réduit y à $l \tan \theta$. Pour construire cette valeur, j'éleve en B une perpendiculaire à l'axe; BC sera égal à $l \tan \theta$, je le rabats sur BB' , et par le point B' je mène une parallèle à l'axe des x . Le point A sera le point de tangence cherché.

Je cherche l'intersection de la courbe avec la ligne BB' . Si je fais $x = l$, $y = \frac{l}{2 \cos \theta}$, en prenant le signe + du radical; on sait qu'au signe — correspond une valeur infinie. Il faut donc construire $BG = \frac{l}{2 \cos \theta}$; or, on a, dans le triangle OBC, $OC = \frac{l}{\cos \theta}$. Donc, en prenant la moitié de cette ligne, on obtient le point G.

Je vais chercher la condition pour que le point G soit au-dessous du point A'; il faut que l'on ait :

$$\frac{1}{2 \cos \theta} < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \text{ ou } \frac{1}{2} < \sin \theta,$$

c'est-à-dire que $\theta > 30^\circ$.

Ainsi, dans le cas des axes dont l'angle est inférieur à 30° , la courbe affecte une forme plus rentrante. Pour $\theta = 30^\circ$, le point G et le point A' sont sur une même parallèle; pour des valeurs de θ supérieures à 30° , la courbe descend obliquement de A' en G.

Cherchons maintenant en quel point la courbe rencontre son axe de symétrie OS. Je fais $x = y$ dans l'équation; il vient :

$$x^4 + 2x^2l^2\cos\theta - 2l^2x^2 = 0,$$

ou
$$x^2 + 2l^2\cos\theta - 2l^2 = 0,$$

en divisant par x^2 , car la solution $x = 0$ ne convient pas à la question, on a :

$$x^2 = 2l^2(1 - \cos\theta); \quad x = 2l\sin\frac{1}{2}\theta.$$

Construisons cette valeur :

(Fig. 47.)
$$BD = l\sin\frac{1}{2}\theta;$$

donc $OE = 2BD = x$. On obtient ainsi le point I en menant la parallèle EI.

Maintenant que nous avons noté quelques points remarquables et indiqué la forme générale de la courbe, cherchons à la déterminer d'une manière plus précise. Nous allons voir ce que produit l'accroissement de x sur les valeurs correspondantes de y . Nous donnerons, dans cette discussion, au radical le signe —, qui correspond à la branche de courbe IGA'. Pour qu'à des valeurs positives de x correspondent des valeurs positives de y , il faut qu'on ait :

$$l^2\cos^2\theta > x^2 - l^2\sin^2\theta,$$

ce qui donne $x < l$. Pour ces valeurs de x inférieures à l , y croîtra avec x jusqu'à l'infini, qui correspond à $x = l$.

Pour des valeurs supérieures à l , y devient négatif, et la branche de courbe correspondant à ces valeurs est au-dessous de l'axe des x .

Pour déterminer cette branche, je prends la valeur absolue de y :

$$y = \frac{-lx}{\sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta} - l \cos \theta} = \frac{-l}{\frac{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \theta}}{x^2} - \frac{l \cos \theta}{x}};$$

la différence croît avec x , donc y décroît. Pour une valeur de x très-rapprochée de l , y est négatif et très-grand; à mesure que x augmente, y diminue; et pour $x = \infty$, il se réduit à $y = -l$, c'est-à-dire que la parallèle $y = -l$ est asymptote de la branche OS'. Cette branche rencontre l'axe de symétrie H à son point d'intersection avec la ligne EI prolongée.

D'après ce que l'on a remarqué de la symétrie de la courbe par rapport à la bissectrice et au centre, on peut aisément compléter la construction de la courbe et la tracer. (Fig. 48.)

Pour mieux encore particulariser la forme de la courbe, déterminons le coefficient d'inclinaison, et cherchons la position de quelques tangentes.

Ce coefficient d'inclinaison est

$$\text{tang } \alpha = - \frac{2xy^2 + 2yl^2 \cos \theta - 2l^2 x}{2y(x^2 - l^2) + 2xl^2 \cos \theta} = \frac{l^2 x - xy^2 - yl^2 \cos \theta}{y(x^2 - l^2) + xl^2 \cos \theta};$$

j'élimine y entre cette équation et celle de la courbe

$$\text{tang } \alpha = \frac{x \cdot \frac{l^2 x^2}{(l \cos \theta + \sqrt{\quad})^2} - \frac{l^2 \cos \theta x}{l \cos \theta + \sqrt{\quad}} + l^2 x^2}{\frac{(x^2 - l^2)lx}{l \cos \theta + \sqrt{\quad}} + l^2 x \cos \theta}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{l(l \cos \theta + \sqrt{\quad})^2 - l^2 \cos \theta (l \cos \theta + \sqrt{\quad}) - l x^2}{(x^2 - l^2)(l \cos \theta + \sqrt{\quad}) + l \cos \theta (l \cos \theta + \sqrt{\quad})^2}$$

effectuant et réduisant

$$\text{tang } \alpha = \frac{l^2 (\cos \theta \sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta} - l \sin^2 \theta)}{(l \cos \theta + \sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta})^2 \sqrt{x^2 - l^2 \sin^2 \theta}}.$$

Pour avoir les tangentes parallèles à l'axe des x , il faut éga-
ler à 0 le coefficient d'inclinaison :

$$x^2 \cos^2 \theta - l^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = l^2 \sin^4 \theta,$$

d'où
$$x = \pm l \text{ tang } \theta.$$

A ces valeurs de x correspondent les parallèles menées par
les points A et A₁.

Pour les tangentes parallèles à l'axe des y , il faut éga-
ler à 0 le dénominateur, soit en posant $x^2 - l^2 \sin^2 \theta = 0$, ou
 $x = \pm l \sin \theta$, soit en posant $l^2 \cos^2 \theta = x^2 - l^2 \sin^2 \theta$, $x = \pm l$.
On peut remarquer que les asymptotes de la courbe se
trouvent au nombre des tangentes que nous venons de dé-
terminer : ce sont en effet des tangentes à l'infini.

Cherchons la tangente au point d'intersection de la courbe
avec son axe de symétrie. Soit au point I par exemple; on a
en ce point $x^2 = 2l^2(1 - \cos \theta)$,

$$l^2(2 - 2\cos \theta - \sin^2 \theta) = l^2(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) = l^2(1 - \cos \theta)^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{tang } \alpha &= \frac{l^2 [l \cos \theta (1 - \cos \theta) - l \sin^2 \theta]}{l^3 (1 - \cos \theta)^2} = \\ &= \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\cos \theta - 1}{1 - \cos \theta} = -1. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette tangente est perpendicu-
laire à la bissectrice.

Dans le cas particulier où l'angle des axes est droit, la
courbe prend une forme beaucoup plus simple; l'équation se
réduit alors à

$$y^2(x^2 - l^2) - l^2 x^2 = 0, \text{ d'où } y = \pm \frac{lx}{(x+l)(x-l)}.$$

On voit de suite que $x = -l$ et $x = l$ sont asymptotes; de même pour $y = l$ et $y = -l$, à cause de la symétrie de l'équation par rapport aux deux variables.

Pour avoir le point où la courbe est coupée par la bissectrice, je fais $x = y$,

$$x^4 - l^2 x^2 - l^2 x^2 = 0,$$

$$x^2(x^2 - 2l^2) = 0.$$

$x = 0$ donne l'origine. Je supprime cette solution; il reste $x = l\sqrt{2}$.