

J. DIENGER

Note sur une courbe dérivant d'une ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6
(1847), p. 234-240

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__234_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur une Courbe dérivant d'une ellipse ()*.

PAR M. J. DIENGER (de Sinsheim)

Soit
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b \tag{1}$$

l'équation d'une ellipse ; menons du centre de cette courbe à sa circonférence tous les rayons vecteurs possibles ; prolongeons chacun d'eux de la même longueur h , et cherchons l'équation de la courbe passant par les extrémités de tous ces rayons vecteurs.

Soient à cet effet x_1, y_1 les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, l'équation du rayon vecteur qui aboutit à ce point sera $y = \frac{y_1}{x_1} x$; si l'on prolonge ce rayon de la longueur h , les coordonnées de son extrémité seront

(*) Du genre Conchoïde, V. t. II, p. 288.

$$x = x_i + \frac{hx_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \quad y = y_i + \frac{hy_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}.$$

Pour trouver l'équation de la courbe cherchée, il faudra éliminer x_i, y_i entre ces deux équations, et l'équation

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1.$$

A cet effet, posons $x_i = \rho \cos \varepsilon$, $y_i = \rho \sin \varepsilon$, on aura d'abord :

$$\rho^2 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{b^2} \right) = 1 \quad (2)$$

et

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varepsilon + h \cos \varepsilon = (\rho + h) \cos \varepsilon \\ y &= \rho \sin \varepsilon + h \sin \varepsilon = (\rho + h) \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

de là on tire

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho + h)^2, \text{ ou } \rho^2 = x^2 + y^2 - 2h\sqrt{x^2 + y^2} + h^2 \\ \cos^2 \varepsilon &= \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2 \varepsilon = \frac{y^2}{x^2 + y^2}; \end{aligned}$$

d'où enfin on obtiendra l'équation de la courbe cherchée en substituant ces valeurs dans l'équation (2) :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) (\sqrt{x^2 + y^2} - h)^2 = x^2 + y^2. \quad (3)$$

On peut facilement voir que cette courbe est composée de quatre parties identiques, comme l'ellipse d'où elle dérive. Les deux points de sa circonférence qui sont le plus éloignés du centre de l'ellipse, qui est en même temps aussi le centre de notre courbe, se trouvent sur l'axe des x ; leur éloignement du centre est $a + h$. Les deux points les moins éloignés du centre se trouvent sur l'axe des y à une distance $b + h$ du centre de la courbe.

Si l'on pose $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, r étant le rayon vecteur de la nouvelle courbe tirée du centre à un point de la circonférence, α l'angle que ce rayon fait avec l'axe des x , on aura

pour l'équation polaire de la courbe en question :

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} + h, \quad (4)$$

l'angle α étant compté depuis zéro jusqu'à 2π

Cherchons maintenant la quadrature de l'espace compris entre l'axe des x , le rayon vecteur correspondant à l'angle α ($\leq \frac{\pi}{2}$), et la portion de la courbe comprise entre ces deux lignes. On sait que cet espace est exprimé en général

par $\frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2 dz$; donc il est dans le cas actuel :

$$\frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^\alpha \frac{dz}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} + abh \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} + \frac{h^2 \alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2} b^2 \int_0^\alpha \frac{dz}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} + bh \int_0^\alpha \frac{dz}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha}} + \frac{h^2 \alpha}{2},$$

$$e \text{ étant } = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

La première de ces deux intégrales se détermine de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{dz}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{dz}{1 + e \cos \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{dz}{1 - e \cos \alpha} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc} \left(\cos = \frac{e + \cos \alpha}{1 + e \cos \alpha} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc} \left(\cos = \frac{-e + \cos \alpha}{1 - e \cos \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc} \left(\cos = \frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{a}{2b} \operatorname{arc} \left(\cos = \frac{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \right). \end{aligned}$$

Quant à la seconde intégrale, on a pour $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\beta \frac{-d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} - \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}} = \\ &= F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\beta, e) = F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, e\right), \end{aligned}$$

en désignant la fonction elliptique de $\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}$ par $F(\varphi, m)$.

Substituant ces valeurs, on trouve pour l'espace cherché :

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{4} \arccos \left(\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha} \right) + \\ bh \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) - F\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) \right] + \frac{h^2}{2}\alpha. \quad (5) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cette expression donne le quart de l'espace entier renfermé par la circonférence de la courbe, dont cet espace est :

$$ab\pi + 4bhF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + h^2\pi. \quad (6)$$

L'espace compris entre l'ellipse et notre courbe se trouve donc :

$$4hbF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right) + h^2\pi. \quad (7)$$

Si dans tous les points de la circonférence de l'ellipse proposée (1) on mène des tangentes, et si du centre de l'ellipse on abaisse des perpendiculaires sur ces tangentes, le lieu de tous les points de rencontre des tangentes et des perpendicu-

lares correspondantes est, comme on sait, une courbe représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2) = a^2 x^2 + b^2 y^2. \quad (8)$$

L'équation polaire à cette courbe est donc

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Cette courbe touche l'ellipse aux extrémités des deux axes principaux, et elle est de même composée de quatre parties identiques. Son plus grand rayon vecteur est a , tandis que le plus petit rayon vecteur de la courbe considérée plus haut est $b+h$.

De là on voit qu'on peut prendre h toujours de manière que la courbe (3) soit tout à fait hors de la courbe (8), ce que nous supposons dans ce qui suit.

L'espace renfermé par la courbe (8) se trouve :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha) d\alpha = (a^2 + b^2) \frac{\pi}{2}.$$

L'espace compris entre l'ellipse (1) et la courbe (8) est $(a-b)^2 \frac{\pi}{2}$, et l'espace compris entre la courbe (8) et la courbe (3) est :

$$4bhF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right) + \frac{\pi}{2} [2h^2 - (a-b)^2]. \quad (9)$$

Si $h = a - b$, ce qui peut avoir lieu dans la supposition précédente, le dernier espace est simplement

$$4b(a-b)F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right) + \frac{\pi}{2} (a-b)^2.$$

Dans le cas où h est assez petit pour que les deux courbes (3) et (8) s'entrecoupent, chacune de ces courbes sera en partie hors de l'autre; pour ce cas, l'expression (9) est la différence de deux quantités, dont l'une est la somme des parties de l'espace compris entre les deux courbes qui sont hors

de la courbe (8), et l'autre, la somme des parties de cet espace qui sont hors de la courbe (3).

Si l'on porte sur le prolongement des rayons vecteurs de l'ellipse (1) des longueurs $h, 2h, 3h\dots$, et si l'on fait passer par les extrémités des longueurs $h, 2h\dots$ des courbes, on aura une série de courbes analogues à celle représentée par l'équation (3). Désignant par première, seconde. . courbe celle qui passe par les extrémités de $h, 2h\dots$, on aura pour l'espace renfermé par la $n^{\text{ième}}$ courbe :

$$ab\pi + 4nbhF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right) + n^2 h^2 \pi;$$

l'espace compris entre la $n^{\text{ième}}$ et la $(n+1)^{\text{ième}}$ courbe est donc .

$$4bhF\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right) + (2n+1)h^2 \pi,$$

c'est-à-dire égal à l'espace compris entre la première courbe et l'ellipse plus $2n$ fois l'espace d'un cercle de rayon h . Il suit de là que les espaces compris entre deux courbes consécutives croissent en progression arithmétique, et que la différence des termes de cette progression est le double du cercle dont le rayon est égal à h . La courbe de l'ordre 0 sera ici l'ellipse primitive (*).

On peut se proposer la même question que ci-dessus relativement à l'ellipsoïde; mais les intégrales qu'on rencontre dans cette nouvelle recherche paraissent trop compliquées pour qu'elles puissent trouver place ici. Il suffira d'indiquer quelques résultats. L'équation de la nouvelle surface est

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - h)' = x^2 + y^2 + z^2,$$

(*) Propriété intuitive, commune au genre conchoïde.

et le volume du corps terminé par cette surface :

$$4\pi \left[\frac{abc}{3} + \frac{abchF(\varepsilon, \eta)}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{ach^2F(\varepsilon, k)}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{h^3}{3} \right],$$

$$\varepsilon \text{ étant} = \arccos \left(\frac{c}{a} \right), \eta = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, k = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$
