

A. VACHETTE

**Deux questions d'examen sur les  
progressions par quotients**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6  
(1847), p. 223-226

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_223\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6_223_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## DEUX QUESTIONS D'EXAMEN

sur les Progressions par quotients.

PAR M. A. VACHETTE,

licencie ès sciences mathématiques et physiques.

---

1° Trouver quatre nombres en progression par quotient, quand on connaît leur somme, celle de leurs carrés, celle de leurs quatrièmes puissances.

Il faut résoudre

$$\begin{aligned}x + y + z + t &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= b \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 &= c \\ xt &= yz.\end{aligned}$$

Je pose  $x+t=x_1$  et  $xt=y_1$ ; les équations données contenant  $x$  et  $t$  de la même manière qu'elles contiennent  $y$  et  $z$ , la valeur de  $x$  donnera non-seulement  $x+t$ , mais  $x+z$ , et le problème sera résolu. Comme on a

$$\begin{aligned}y+z &= a-x_1, \quad y^2+z^2 = (a-x_1)^2 - 2y_1 = b - (x_1^2 - 2y_1) \\ y^4+z^4 &= (y^2+z^2)^2 - 2y^2z^2 = (b-x_1^2+2y_1)^2 - 2y_1^2 = \\ &= c - (x_1^2 - 2y_1)^2 + 2y_1^2,\end{aligned}$$

on aura à résoudre les deux équations

$$\begin{aligned}2x_1^2 - 2ax_1 - 4y_1 + a^2 - b &= 0, \\ 2(x_1^2 - 2y_1)(x_1^2 - 2y_1 - b) - 4y_1^2 + b^2 - c &= 0.\end{aligned}$$

et en remarquant que la première donne

$$2(x_1^2 - 2y_1) = 2ax_1 - a^2 + b$$

et

$$x_1^2 - 2y_1 - b = ax_1 - \frac{a^2 + b}{2} = \frac{2ax_1 - a^2 - b}{2},$$

la deuxième deviendra

$$(2ax_1 - a^2 + b)(2ax_1 - a^2 - b) - 2y_1^2 + \frac{b^2 - c}{2} = 0,$$

ou bien

$$4a^2x_1^2 - 8a^3x_1 + a^4 - b^2 - 2y_1^2 + \frac{b^2 - c}{2} = 0,$$

ce qui donne les deux équations

$$\begin{aligned} 2(x_1^2 - ax_1) &= 4y_1 - a^2 + b, \\ 4a^2(x_1^2 - ax_1) &= 8y_1^2 - a^4 - b^2 + 2c, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la division,

$$\begin{aligned} 2a^2(4y_1 - a^2 + b) &= 8y_1^2 - a^4 - b^2 + 2c, \\ 8y_1^2 - 8a^2y_1 + a^4 - 2a^2b - b^2 + 2c &= 0, \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{2a^2 \pm \sqrt{2(a^2 + b)^2 - 4c}}{2}.$$

Comme  $x_1$ , ou  $x + t$  n'est jamais égal à  $a$ , alors  $y_1$ , ou  $xt$  n'est jamais égal à  $\frac{a^2}{4}$ , valeur maximum du produit de deux facteurs dont la somme est  $a$ , ce qui sert à rejeter la solution où le radical a le signe  $+$ . On trouve ensuite, avec

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2a^2 - \sqrt{2(a^2 + b)^2 - 4c}}{2}; \quad x_1 = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2 + 8y_1}}{2} = \\ &= \frac{a \pm \sqrt{3a^2 + 2b - 2\sqrt{(a^2 + b)^2 - 4c}}}{2}. \end{aligned}$$

On combinera les deux valeurs de  $x_1$  alternativement avec celle de  $y_1$ , et on aura d'abord  $x$  et  $t$ , ensuite  $y$  et  $z$ . La question n'admet qu'une solution.

Soit par exemple  $a=21$ ,  $b=125$ ,  $c=5729$ , on trouvera  $\gamma_1=24$  et  $x_1=10$  avec  $x_1=11$ , ce qui donne pour la proportion cherchée : 4:3::8:6.

Le problème est impossible pour  $c > \frac{(a^2+b)^2}{2}$ . Le maximum de la somme des cubes des termes d'une proportion par quotient dont la somme et la somme des carrés sont connues, est  $c = \frac{(a^2+b)^2}{2}$  donné par  $\gamma_1=a^2$  et  $x_1 = \frac{a \pm \sqrt{3a^2+2b}}{2}$ .

2° Trouver une progression par quotient, connaissant la somme  $s$  des termes, la somme  $s_2$  de leurs carrés, la somme  $s_4$  de leurs quatrièmes puissances.

On a donc

$$\frac{lq-a}{q-1} = s; \quad \frac{l^2q^2-a^2}{q^2-1} = s_2; \quad \frac{l^4q^4-a^4}{q^4-1} = s_4,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{lq+a}{q+1} = \frac{s_2}{s} = m; \quad \frac{l^2q^2+a^2}{q^2+1} = \frac{s_4}{s_2} = n.$$

Prenant pour inconnues  $lq=x$ ,  $a=y$  et  $q$ , on a les trois équations

$$\begin{aligned} x+y &= m(q+1), \\ x-y &= s(q-1), \\ x^2+y^2 &= n(q^2+1); \end{aligned}$$

éliminant  $x$  et  $y$ , on obtient

$$(m^2+s^2-2n)q^2+2(m^2-s^2)q+m^2+s^2-2n=0,$$

équation réciproque, car elle doit donner aussi bien le quotient du deuxième terme par le premier que le quotient de l'avant-dernier terme par le dernier. On en déduit :

$$\begin{aligned} q &= \frac{s^2-m^2 \pm \sqrt{(s^2-m^2)^2 - (s^2-m^2+2n)^2}}{s^2+m^2-2n} = \\ &= \frac{s^2-m^2 \pm 2\sqrt{(s'-n)(n-m^2)}}{s^2+m^2-2n}. \end{aligned}$$

Comme on a les valeurs

$$x = \frac{m+s}{2}q + \frac{m-s}{2}, \quad y = \frac{m-s}{2}q + \frac{m+s}{2};$$

on pourra trouver tous les éléments de la progression, et le problème n'aura qu'une solution.

Si l'on fait  $s = 31$ ,  $s_2 = 341$  et  $s_4 = 69905$ , on en déduit  $m = 11$  et  $n = 205$ . On trouve alors  $q = 2$ , et la progression cherchée est  $\div 1:2:4:8:16$ .

Il faut, pour la possibilité du problème, que les valeurs de  $q$  soient réelles, ce qui exige que  $n$  soit compris entre  $s^2$  et  $m^2$ , ou que  $s_4s^2$  soit compris entre  $s_2s_4$  et  $s_2^2s_4$ .