Terquem

Sur les normales et les développées des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 205-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__205_1>

SUR LES NORMALES

et les Développées des coniques.

Remarque. Nous faisons usage, dans ce qui suit, des fonctions que nous avons introduites dans la théorie des coniques, fonctions qui existent similairement pour toutes les lignes et surfaces algébriques, et qui servent à l'application de la *théorie des équations* à la recherche des propriétés de l'espace, ce qui constitue la vraie géométrie cartésienne, et qu'on n'enseigne pas dans nos livres élémentaires; ce qu'ils donnent sous ce nom n'est qu'une macédoine de problèmes et de théorèmes, résolus et démontrés moyennant des opérations algébriques, chose qu'on savait faire et qu'on faisait plus d'un siècle avant Descartes. Rappelons notre notation. Nous désignons la fonction fondamentale par L, savoir :

$$L=AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC);$$

elle renferme six coefficients, et de là six fonctions dérivées partielles :

$$\frac{dL}{dA}=l'=E^2-4CF;\ \frac{dL}{dC}=l=D^2-4AF;$$

$$\frac{dL}{dD}=k'=2CD-BE;\ \frac{dL}{dE}=k=2AE-BD;$$

$$\frac{dL}{dB}=-n=DE-2BF;\ \frac{dL}{dF}=m=B^2-4AC.$$

I. Problème. Étant donnée l'équation générale d'une conique, rapportée à des axes rectangulaires, et l'équation d'une droite située dans le plan de la conique, quelle relation doit exister entre les coefficients pour que la droite soit normale à la courbe.

Solution. Soient

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0, \quad (1)$$

l'équation de la conique, et

$$dy+ex+f=0 \quad (2)$$

l'équation de la droite, désignons restrictivement par x et y les coordonnées du point d'intersection de ces deux lignes. Pour satisfaire à la condition énoncée, on doit avoir

$$\frac{2Ay+Bx+D}{2Cx+By+E}=\frac{-e}{d},$$

ou bien

$$y(2Ad+Be)+x(2Ae+Bd)=-(dD+eE).$$

Combinant cette équation avec l'équation (2), on déduit

$$Mx=f(2Ad+Be)-d(dD+eE);\ My=-f(2Ce+Bd)+$$
$$+e(dD+eE);\ M=2(C-A)de+B(d^2-e^2);$$

substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), réunissant les termes en f^2, en f, et les termes indépendants de f, on trouve, toute réduction faite, et faisant usage des relations d'identité (t. I, p. 490) :

$$f(Ad^2+Bde+Ce^2)[mf+2k'd+2ke]+e^4(Cl-L)+$$
$$+de^3[Bl-2Cn]+d^2e^2[l(A-2C)+l'(C-2A)+2mF]+$$
$$+d^3e[Bl'-2An]+d^4[Al'-L)=0, \qquad (3)$$

relation cherchée.

Corollaire 1. Lorsque le rapport $\frac{e}{d}$ est constant, l'équation en f n'est que du second degré; ainsi il n'y a que deux normales parallèles, ce qui est évident; lorsque f est nul, ce qui revient aux droites passant par un même point, l'équation en $\frac{e}{d}$ est du quatrième degré. Nous devons à M. Gérono la première discussion complète de ce cas (t. II, p. 16).

PROBLÈME 2. Étant donnée l'équation d'une ligne du sixième degré, à coordonnées rectangulaires, vérifier si elle est la développée d'une conique.

Solution. Soit $\varphi(x,y)=0$ l'équation donnée du sixième degré, et soient $x'y'$ les coordonnées d'un point de la courbe; l'équation de la tangente à la courbe en ce point est $yD_{y'}+xD_{x'}=y'D_{y'}-x'Dx'$; $D_{x'}$ et $D_{y'}$ désignent les dérivées de la fonction φ prises successivement par rapport à x et à y, et dans lesquelles ces variables courantes sont remplacées respectivement par x' et y'; on sait d'ailleurs que le second membre ne renferme que des termes du cinquième degré. Mettant dans la relation (3) du problème précédent, au lieu de d, e, f, respectivement les fonctions $D_{y'}$, $D_{x'}$, $y'Dy_1 - x'Dx_1$; si l'on peut donner aux lettres A, B, C...F des valeurs telles que la relation s'annule *identiquement;* alors la courbe est la développée d'une conique, déterminée par les valeurs des coefficients A, B... F. Si cette possibilité n'existe pas, la courbe donnée n'est pas la développée d'une conique.

PROBLÈME 3. Étant donnée l'équation générale d'une conique, à coordonnées rectangulaires, trouver l'équation de la développée.

1er *Cas.—Courbes à centre.* Soit l'équation de la courbe $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$; prenons pour origine le centre; à cet effet, faisons $x=x'+\frac{k}{m}$, $y=y'+\frac{k'}{m}$, on aura $Ay'^2+Bx'y'+C'x'^2+\frac{L}{m}=0$; rapportons les courbes à ses axes principaux; posons $x'=x''\cos\varphi - y''\sin\varphi$, $y'=+x'\sin\varphi+y''\cos\varphi$, on peut toujours supposer que φ est un angle aigu, et substituant, il vient $a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2$ pour l'ellipse; la développée de cette ellipse est

$$[a^2x''^2+b^2y''^2-c^4]^3=27a^2b^2c^4x^2y^2 \quad (V.\ \text{t. II, p. 74}),$$

ou

$$c^2=a^2-b^2.$$

Revenant au second système d'axes, on a

$$x''=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi;\ y''=-x'\sin\varphi+y'\cos\varphi;$$
$$x'^2=x''^2\cos^2\varphi+2x'y'\sin\varphi\cos\varphi+y'^2\sin^2\varphi;$$
$$y''^2=x'^2\sin^2\varphi-2x'y'\sin\varphi\cos\varphi+y'^2\cos^2\varphi;$$

on a $\operatorname{tang}2\varphi=\frac{-B}{A-C}$; de là on déduit, par les relations trigonométriques connues :

$$\sin 2\varphi = \frac{+B}{R} \text{ (B et R doivent avoir même signe)};$$

$$\cos^2\varphi = \frac{R+A-C}{2R}; \quad \sin^2\varphi = \frac{R+C-A}{2R}, \text{ où } R^2=(A-C)^2+B^2;$$

on a aussi

$$a^2 = \frac{2L}{m^2}[N+R]; \quad b^2 = \frac{2L}{m^2}[N-R], \text{ où } N=A+C;$$

et $c^4 = \dfrac{16L^2R^2}{m^4}$ (*V.* t. I, p. 493, et t. II, p. 431);

faisant les substitutions, il vient

$$4[m^2(Ax'^2 - Bx'y' + Cy'^2) - 4LR^2]^3 + 27m^5L[B(x'^2 - y'^2) + \\ + 2(A-C)x'y']^2 = 0. \qquad (1)$$

On revient du second système au premier, moyennant

$$x' = x - \frac{k}{m}; \quad y' = y - \frac{k'}{m},$$

et l'on a ainsi l'équation générale de la développée de l'ellipse, les axes étant rectangulaires.

Pour l'hyperbole, il faut changer le signe de b^2, et prendre $b^2 = \dfrac{2L}{m^2}[R-N]$, et l'on arrive à la même équation que ci-dessus.

Parabole. Même équation générale que dessus, et soient α, β les coordonnées du sommet, on a
$8NL\alpha = k(l+l') - 4EL$; $8NL\beta = k'(l+l') - 4DL$ (t. II, p. 432); adoptons le sommet pour origine, et pour axes, les axes principaux; à cet effet, faisons

$$x = \alpha + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y = \beta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

on doit obtenir l'équation

$$y'^2 + \frac{\sqrt{LN}}{N^2}x' = 0,$$

car le paramètre principal est égal à $\frac{\sqrt{\mathrm{LN}}}{\mathrm{N}^2}$ (*V.* t. I, p. 494) ; l'équation de la développée est alors

$$-\frac{27}{2}\frac{\sqrt{\mathrm{LN}}}{\mathrm{N}^2}y''^2-8\left(x'+\frac{\sqrt{\mathrm{NL}}}{2\mathrm{N}^2}\right)^3=0;$$

dans le cas actuel, $\mathrm{R}=\pm(\mathrm{A}+\mathrm{C})$; donc

$$\cos^2\varphi=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}};\ \sin^2\varphi=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}};\ \sin 2\varphi=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{R}};$$

revenons du second système au premier : l'on a

$$x'=\cos\varphi(x-\alpha)+\sin\varphi(y-\beta);\ y'=-\sin\varphi(x-\alpha)+\cos\varphi(y-\beta),$$

$$y''=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[\mathrm{C}(x-\alpha)^2-\mathrm{B}(x-\alpha)(y-\beta)+\mathrm{A}(y-\beta)^2\right],$$

$$x'=\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}\left[\sqrt{\mathrm{A}}(x-\alpha)+\sqrt{\mathrm{C}}(y-\beta)\right]=\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{A}}}\left[2\mathrm{A}(x-\alpha)+\right.$$
$$\left.+\mathrm{B}(y-\beta)\right),$$

et
$$\sqrt{\mathrm{L}}=\frac{k}{2\sqrt{\mathrm{A}}};$$

substituant, il vient

$$54\mathrm{A}k\mathrm{N}^2\left[\mathrm{C}(x-\alpha)^2+\mathrm{B}(x-\alpha)(y-\beta)+\mathrm{A}(y-\beta)^2\right]=$$
$$=\left[4\mathrm{AN}(x-\alpha)+2\mathrm{BN}(y-\beta)-k\right]^3;$$

mais le trinôme du premier membre est le carré de $(x-\alpha)\sqrt{\mathrm{C}}+(y-\beta)\sqrt{\mathrm{A}}$, et remplaçant $\sqrt{\mathrm{C}}$ par $\frac{\mathrm{B}}{2\sqrt{\mathrm{A}}}$, il vient

$$27k\mathrm{N}^2\left[2\mathrm{A}(y-\beta)+\mathrm{B}(x-\alpha)\right]^2=-2\left[4\mathrm{AN}(x-\alpha)+\right.$$
$$\left.+2\mathrm{BN}(y-\beta)+k\right]^3.$$

Problème 4. Étant donnée l'équation générale d'une conique à coordonnées obliques, trouver l'équation de la développée.

Solution. Même notation que dessus : γ l'angle des axes;

conservons même origine et même axe des x ; prenons les axes rectangulaires. A cet effet, faisons

$$x=x'-y'\cot\gamma\,;\ y\sin\gamma=y',$$

il vient

$$y'^2[\mathrm{A}-\mathrm{B}\cos\gamma+\mathrm{C}\cos^2\gamma]+x'y'[\mathrm{B}\sin\gamma-2\mathrm{C}\cos\gamma]+\mathrm{C}x'^2\sin^2\gamma+$$
$$+y'\sin\gamma[\mathrm{D}-\mathrm{E}\cos\gamma]+\sin^2\gamma(\mathrm{E}x'+\mathrm{F})=0\,;$$

les axes étant rectangulaires, on peut appliquer les résultats précédemmen tobtenus, et ensuite revenir au système oblique à l'aide des formules $x'=x+y\cos\gamma$; $y'=y\sin\gamma$.