NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Question d'examen. Lieu des milieux des cordes de direction donnée, interceptée entre deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 202-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__202_0>

QUESTION D'EXAMEN (*V.* t. V, p. 703).

Lieu des milieux des cordes de direction donnée, intercèptée entre deux coniques.

—

I. Théorème. Le milieu des cordes de direction donnée, interceptée entre deux coniques, est, généralement parlant, une ligne du quatrième degré.

Démonstration. Prenons pour axe des y une droite ayant la direction donnée, et soit l'équation ordinaire à six termes celle de la première conique; et une équation analogue avec des coefficients accentués, celle de la seconde conique. Toutefois nous supposons, ce qui est toujours permis, que le coefficient A de y^2 est le même dans les deux équations; résolvant les deux équations, on a

$$[2AY_1+Bx+D]=\sqrt{mx^2-2kx+l}\,;\ [2AY_2+B'x+D']= \\ =\sqrt{\mu x^2-2\varkappa x+\lambda}\,;$$

Y_1 et Y_2 sont les coordonnées correspondant à la même abscisse dans chaque conique; μ, $\varkappa$, λ sont des quantités de la seconde conique, analogues à m, k, l dans la première conique

$$m=B^2-4AC$$
$$k=2AE-BD$$
$$l=D^2-4AF.$$

La grandeur *absolue* de la corde interceptée est Y_1-Y_2; en représentant par y l'ordonnée du milieu de cette corde, on a $2y=Y_1+Y_2$; il vient donc

$$4Ay+x(B+B')+D+D'=\sqrt{mx^2-2kx+l}+\sqrt{\mu^2-2\varkappa x+\lambda}\,;$$

faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$[(4Ay+x(B+B')+(D+D')^2-x^2(m+\mu)+2x(k+\varkappa)-l-\lambda]^2=$$
$$=4[mx^2-2kx+l]\,[\mu x^2-2\varkappa x+\lambda],$$

équation du quatrième degré.

II. *Discussion.* Le second membre peut prendre cette forme :

$$4m\mu\left[x^2-2\frac{k}{m}+\frac{l}{m}\right]\,\left[x^2-2\frac{\varkappa}{\mu}x+\frac{\lambda}{\mu}\right];$$

les deux facteurs trinômes deviennent égaux, lorsque

$$\frac{k}{m}=\frac{\varkappa}{\mu};\quad \frac{l}{m}=\frac{\lambda}{\mu},\qquad (1)$$

la première équation annonce que les centres des deux coniques sont sur une parallèle à l'axe des y, et la seconde, que les pôles de l'axe des y, pris par rapport aux deux coniques, sont aussi sur une parallèle à l'axe des y.

On a les identités

$$\frac{k^2}{m^2}-\frac{l}{m}=\frac{4AL}{m^2},\ \text{ou } L=AE^2-BDF+CD^2+mF;$$

$$\frac{\varkappa^2}{\mu^2}-\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4AL'}{\mu^2}\ \text{(t. 1, p. 490)};$$

donc, d'après les équations (1), $\frac{L}{m^2}=\frac{L'}{\mu^2}$; mais les trinômes peuvent se mettre sous la forme

$$\left(x-\frac{k}{m}\right)^2-\frac{4AL}{m^2}\ \text{ et }\ \left(x-\frac{\varkappa}{\mu}\right)^2-\frac{4AL'}{\mu^2};$$

le lieu est donc le système de deux coniques représenté par l'équation

$$\left[4Ay+(B+B')x+D+D'\right]^2=\left[\sqrt{m}\pm\sqrt{\mu}\right]^2\left[x^2-\frac{2kx}{m}+\frac{m}{l}\right].$$

III. Si les deux coniques sont concentriques et ont un diamètre commun de même grandeur ; on peut prendre ce diamètre pour axe des x et le centre pour origine ; alors

$k=\varkappa=0$, $F=F'$, et $l=4AF=\lambda=-4AF'$; donc l'équation du quatrième degré devient

$$[(4Ay+x(B+B')^2-x^2(m+\mu)-2l]^2=4\,[mx^2+l]\,[\mu x^2+\lambda],$$

c'est la question 12 proposée tome V, p. 702. $\frac{F}{A}$ ou $\frac{l}{4A^2}$ présente le carré du demi-diamètre commun.

Avis. Nous engageons les candidats à traiter cette dernière question directement. Les méthodes les plus générales sont toujours les meilleures sous le point de vue scientifique, mais ne valent rien pour les examens où l'on ne donne que de petits cas particuliers qui exigent de petits expédients auxquels il faut être préparé d'avance, sous peine d'échouer, les plus forts comme les plus faibles. Tm.