

FONTÉS

## Note sur un problème de géométrie

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 180-185

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_180\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__180_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## NOTE

*Sur un problème de géométrie.*

**PAR M. FONTÉS,**

Professeur de mathématiques à Mâcon.

---

*Problème.* Par un point B donné à égale distance de deux droites formant un angle quelconque, mener une sécante telle que la partie interceptée par ces droites soit égale à une ligne donnée  $m$ .

On connaît les élégantes constructions de ce problème données pour le cas d'un angle droit par Pappus, Newton et d'autres (*V. la Géométrie analytique* de M. Cirrodde). Je me propose dans cette note de montrer comment ces constructions doivent être modifiées dans le cas d'un angle quelconque.

*1<sup>re</sup> Construction (fig. 36).* On sait que la question proposée a toujours deux solutions, et qu'elle peut en avoir quatre. Dans tous les cas, j'observe que les sécantes sont deux à deux également distantes du sommet A de l'angle donné, de sorte que si l'on prend cette distance pour inconnue, elle n'aura

que deux valeurs différentes. D'ailleurs ces distances connues, il sera facile de construire les solutions du problème, puisqu'il suffira de décrire du point A comme centre des circonférences avec des rayons égaux à ces distances, et de leur mener des tangentes par le point B.

Soit donc CX une des sécantes cherchées, et appelons  $r$  sa distance AN au point A; soit  $AC=y$ ,  $AX=x$ ,  $BP=AP=a$ , et  $\theta$  l'angle  $yAx$ ; le triangle CAX donne

$$m^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta. \quad (1)$$

En considérant la surface du même triangle, on a

$$mr = xy \sin \theta. \quad (2)$$

La similitude des triangles donne XCA, XBP donne

$$y : a :: x : x - a, \text{ d'où } x + y = \frac{xy}{a}. \quad (3)$$

Élevant les deux membres de cette dernière équation au carré, et remplaçant dans le résultat  $xy$  et  $x^2 + y^2$  par leurs valeurs déduites des équations (1) et (2), on obtient l'équation suivante en  $r$  :

$$mr^2 - 2a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta) r - ma^2 \sin^2 \theta = 0. \quad (4)$$

Cette équation a toujours deux racines réelles : une positive, l'autre négative. La racine positive déterminera la distance AN.

Cherchons l'équation qui déterminera la distance AN'' du point A aux deux autres sécantes. En la désignant par  $r$ , posant  $AX''=x$ ,  $AC''=y$ , le triangle C''AX'' donnera

$$m^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta$$

$$mr = xy \sin \theta,$$

et la similitude des triangles C''AX'', BPX'' donnera

$$y : a :: x : a - x, \text{ d'où } y - x = \frac{xy}{a}.$$

Faisant l'élimination de  $x$  et  $y$  comme dans le cas précédent, on obtient l'équation

$$mr^2 + 2a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta) r - ma^2 \sin^2 \theta = 0, \quad (5)$$

équation dont la solution positive donnera la distance  $AN''$ . Mais cette équation a ses racines égales et de signes contraires à celles de l'équation (4). Donc la solution négative de l'équation (4), prise en valeur absolue, donnera la distance  $AN''$ . Il suffit donc de construire les racines de l'équation (4).

Pour cela, écrivons cette équation ainsi :

$$r \left[ r - \frac{2a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta)}{m} \right] = a^2 \sin^2 \theta. \quad (6)$$

Construisons d'abord une ligne

$$u = \frac{a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta)}{m} = \frac{a \sin \theta \cdot a (1 + \cos \theta)}{m}.$$

Or, si on abaisse du point A une perpendiculaire AD sur la ligne BG parallèle à  $\gamma\gamma'$ , on a

$$AD = a \sin \theta; \quad BD = BP + PD = a + a \cos \theta = a(1 + \cos \theta),$$

donc  $u = \frac{AD \times BD}{m}$ . Alors, si on prolonge DA et qu'on prenne  $DL = m$ , que l'on tire LB, et qu'on lui mène par le point A une parallèle qui rencontre BG au point F, la ligne DF est égale à  $\gamma$ , car on a

$$LD : BD :: AD : DF, \text{ d'où } DF = \frac{AD \times BD}{m};$$

alors l'équation (6) devient

$$r(r - 2u) = a^2 \sin^2 \theta.$$

Donc si du point F comme centre, avec FD pour rayon, on décrit un cercle, et qu'on prolonge le diamètre AF qui rencontre la circonférence en E et E', AE sera la racine positive de l'équation (4), et AE' la valeur absolue de la racine négative.

Alors je décris du point A, comme centre, des circonférences avec les rayons AE et AE'; je leur mène des tangentes par le point B, et j'ai construit ainsi les quatre solutions du problème.

Cette construction montre que la question n'a pas toujours quatre solutions; car pour qu'on puisse mener des tangentes à un cercle par le point B, il faut que ce point soit extérieur. Cette condition est toujours satisfaite pour le plus petit cercle, car on a  $AE' < AF < AB$ . Elle ne sera remplie pour l'autre cercle que dans le cas où son rayon AE sera moindre que AB. Écrivons que la valeur positive de  $r$  donnée par l'équation est moindre que AB. Le triangle isocèle BPA donne

$AB = 2.a \cos \frac{1}{2} \theta$ , et on aura :

$$\frac{a^2 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta) + \sqrt{a^4 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2 + m^2 a^2 \sin^2 \theta}}{m} < 2a \cos \frac{1}{2} \theta,$$

d'où

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2 + m^2 \sin^2 \theta} < 2m \cos \frac{1}{2} \theta - a \sin \theta (1 + \cos \theta);$$

remplaçant  $\sin \theta$  par  $2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta$ ,  $1 + \cos \theta$  par  $2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta$ ,

et élevant au carré les deux membres, il vient

$$\begin{aligned} 16 a^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta + 4 m^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta < \\ < (2m \cos \frac{1}{2} \theta - 4a \sin \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta)^2; \end{aligned}$$

effectuant le carré et réduisant, on a

$$m \sin^2 \frac{1}{2} \theta < m - 4a \sin \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

ou 
$$m (1 - \sin^2 \frac{1}{2} \theta) > 4a \sin \frac{1}{2} \theta \cos^2 \frac{1}{2} \theta,$$

ou enfin 
$$m > 4a \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Or, si on mène la ligne KH perpendiculaire à AB, on a

$$KH=2.BH, \text{ et } BA=HA \sin \frac{1}{2} \theta = 2a \sin \frac{1}{2} \theta;$$

donc 
$$KH = 4a \sin \frac{1}{2} \theta;$$

donc la condition nécessaire pour que le problème admette quatre solutions, c'est que la longueur donnée  $m$  soit plus grande que la ligne inscrite menée par le point B perpendiculairement à AB. On sait bien, en effet, que cette ligne KH est la ligne minimum.

2° *Construction.* Soit CX. une des sécantes cherchées. Je fais au point X un angle BXR =  $\theta$ , et soit R le point où la ligne XR rencontre la parallèle à Ax menée par le point B. Si le point R était connu, en décrivant sur BR un segment capable de l'angle donné  $\theta$ , l'intersection de l'arc de ce segment avec Ax déterminerait le point X, et le problème serait résolu. Je prends donc pour inconnue BR =  $z$ , et j'appelle toujours  $r$  la perpendiculaire AN abaissée du point A sur CX. Les deux triangles CAX et BXR étant équiangles, leurs lignes homologues sont proportionnelles, ce qui donne

$$CX:BR::AN:BT, \text{ ou } m:z::r:a \sin \theta, \text{ d'où } r = \frac{ma \sin \theta}{z}.$$

Si je considère de même la sécante C''X'', je fais au point X'' un angle BX''R' égal à l'angle  $\gamma'$  Ax, c'est-à-dire au supplément de l'angle  $\theta$ , et soit R' le point où X''R' rencontre la parallèle à Ax menée par le point B. Soit BR' =  $z$ , AN'' =  $r$ ; les deux triangles C''AX'' et R'X''B sont équiangles et donnent

$$m:z::r:a \sin \theta, \text{ d'où } r = \frac{ma \sin \theta}{z}.$$

C'est la même relation que précédemment. Et comme les deux valeurs de  $r$  sont, la première la racine positive, la seconde la racine négative, prise en valeur absolue, de l'é-

quation (4); si, dans cette équation (4), je remplace  $r$  par la valeur  $\frac{ma \sin \theta}{z}$ , l'équation résultant de cette substitution devra avoir deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, dont la première sera la valeur de BR, et la seconde, prise en valeur absolue, la valeur de BR'. Cette équation est

$$m \cdot \frac{m^2 a^2 \sin^2 \theta}{z^2} - 2a^2 \sin \theta (1 + \cos \theta) \cdot \frac{ma \sin \theta}{z} - ma^2 \sin^2 \theta = 0,$$

ou 
$$z^2 + 2a(1 + \cos \theta)z - m^2 = 0;$$

d'où 
$$z = -a(1 + \cos \theta) \pm \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + m^2}.$$

Mais si du point A, je mène une perpendiculaire AS sur BR',

j'ai 
$$BS = BQ + QS = a + a \cos \theta = a(1 + \cos \theta);$$

donc 
$$z = -BS \pm \sqrt{BS^2 + m^2};$$
  
par conséquent,

$$BR = -BS + \sqrt{BS^2 + m^2},$$

$$BR' = BS + \sqrt{BS^2 + m^2}.$$

On déduit de là :

$$BR + BS = BR' - BS = \sqrt{BS^2 + m^2},$$

ou 
$$SR = SR' = \sqrt{BS^2 + m^2}.$$

Donc, si au point B, on élève une perpendiculaire à QB, d'une longueur BM = m, en joignant SM, on aura

$SM = \sqrt{BS^2 + m^2}$ , et l'arc décrit du point S comme centre avec SM pour rayon déterminera par ses intersections avec la droite BQ prolongée les points R et R'. Alors, pour achever la construction, on décrira sur BR et au-dessous de cette ligne un segment capable de l'angle  $\theta$ ; on décrira sur BR' et au-dessous de cette ligne un segment capable de l'angle  $180^\circ - \theta$ . Les arcs de ces segments déterminent sur  $xx'$  les points X, X', X'', X''', et il n'y aura plus qu'à joindre ces points au point B pour avoir les sécantes cherchées.