GÉRONO

Démonstration d'un théorème de M. Chasles, sur les rayons vecteurs des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 150-158

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__150_1>

DÉMONSTRATION

d'un théorème de M. CHASLES, *sur les rayons vecteurs des coniques.*

(Question d'examen, *voir* t. V, p. 702.)

Quand deux courbes du second degré ont un foyer commun, si l'on mène de ce point deux rayons vecteurs aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'une des courbes, la somme ou la différence de ces rayons divisés respectivement par les rayons de la seconde courbe, dirigés suivant les mêmes droites que les premiers, est constante.

1. Je supposerai, d'abord, que la première courbe est une ellipse. Je nommerai $2a$ son grand axe; $2c$ la distance de ses deux foyers F, F' (*fig.* 23); e le rapport $\frac{c}{a}$; r, r' les rayons vecteurs Fd, Fd', menés du foyer F aux extrémités d, d' d'un diamètre quelconque dCd' de l'ellipse.

Le quadrilatère FdF'd' étant évidemment un parallélogramme, on a, pour toutes les directions données au diamètre dCd' :

$$\text{F}d + \text{F}d' = \text{F}d + \text{F}'d, \quad \text{ou} \quad r + r' = 2a. \qquad (1)$$

Soient FD, FD′, ou R, R′, les rayons vecteurs de la seconde courbe, dirigés suivant Fd, Fd'; et GG′ la directrice correspondante au foyer F. La direction de l'axe focal de cette courbe s'obtiendra en abaissant du foyer F une perpendiculaire FN sur la directrice GG′.

Je prends pour axe des abscisses positives le prolongement FX de la perpendiculaire NF, et je place au point F l'origine des coordonnées; l'axe des y sera la droite FY perpendiculaire sur FX.

En désignant par δ l'angle F′FX, l'abscisse CM du centre C de l'ellipse sera $FC \times \cos\delta$, ou $c \cos\delta$; et si x, x' représentent les abscisses des extrémités d, d' du diamètre dCd', on aura, quelle que soit la direction de ce diamètre :

$$x + x' = 2c \,.\, \cos\delta. \qquad (2)$$

Actuellement, je nomme :

e' le rapport invariable des distances DF, DG d'un point quelconque de la seconde courbe au foyer F, et à la directrice correspondante;

p' le demi-paramètre, ou l'ordonnée correspondante au foyer, qui est évidemment égale au produit $FN \times e'$;

X, X′, les abscisses des extrémités D, D′ des rayons R, R′.

Et je distingue deux cas : la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, ou bien une hyperbole.

2. Lorsque la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, les trois points D, D′, F sont toujours situés d'un même côté de la directrice GG′. Et, suivant que l'abscisse du point D sera positive ou négative, on aura, en abaissant de ce point une perpendiculaire DH sur l'axe des y, qui rencontre en G la directrice :

$$FD = DG \times e' = (DH + FN)e',$$

ou

$$FD = DG \times e' = (FN - DH)e',$$

ce qui donne, dans les deux hypothèses, en tenant compte du signe de X :

$$R = p' + e'X. \qquad (3)$$

On a de même : $$R' = p' + e'X'. \qquad (4)$$

Les valeurs de R, R′, déterminées par les formules (3) et (4), sont nécessairement positives.

De plus, les triangles semblables Fdh, FDH donnent $\frac{Fd}{FD} = \frac{Fh}{FH}$. Lorsque les rayons Fd, FD ou r, R, sont dirigés dans le même sens, les abscisses x, X, des points d, D ont le même signe, et l'on peut substituer au rapport $\frac{Fh}{FH}$ celui des abscisses x, X. Alors, l'égalité précédente devient.

$$(5) \qquad \frac{r}{R} = \frac{x}{X}; \text{ on trouve de même } \frac{r'}{R'} = \frac{x'}{X'}. \qquad (6)$$

Au moyen de ces relations, il est facile de démontrer le théorème énoncé.

En effet, remplacez dans l'équation (3) X par sa valeur $\frac{Rx}{r}$ déduite de l'équation (5), il en résultera successivement :

$$R = p' + \frac{e'Rx}{r}; \quad Rr = p'r + e'Rx; \quad \frac{r}{R} = \frac{r - e'x}{p'}. \qquad (7)$$

Par un calcul entièrement semblable, les équations (4) et (6) donnent :

$$\frac{r'}{R'} = \frac{r' - e'x'}{p'}. \qquad (8)$$

On a donc $\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \frac{(r + r') - e'(x + x')}{p'}$, ou parce que $r + r' = 2a$, et $x + x' = 2c \,.\, \cos\delta$:

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \frac{2a - 2e'c.\cos\delta}{p'} = \frac{2a}{p'}(1 - ee'.\cos\delta.) \quad (9)$$

Cette dernière égalité démontre que la somme des rapports $\frac{r}{R}$, $\frac{r'}{R'}$ est une quantité constante.

Remarque. Si les rayons R, R′, étaient dirigés en sens contraires de r, r', les abscisses X, X′, auraient des signes différents de ceux des abscisses x, x'. Alors, les équations (5) et (6) deviennent $\frac{r}{R} = -\frac{x}{X}$, $\frac{r'}{R'} = -\frac{x'}{X'}$; on en déduit $X = -\frac{Rx}{r}$, $X' = -\frac{R'x'}{r'}$, et il faut remplacer x, x', par $-x$, $-x'$, dans le calcul qui a conduit aux relations (7) et (8). Cette substitution donne :

$$\frac{r}{R} = \frac{r + e'x}{p'}, \quad \frac{r'}{R'} = \frac{r' + e'x'}{p'}, \text{ et par suite :}$$

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = \frac{2a + 2e'c \cdot \cos\delta}{p'} = \frac{2a}{p'}(1 + ee'\cos\delta); \qquad (10)$$

de sorte que si l'on désigne par $R_{,}$, $R'_{,}$ les rayons vecteurs de la seconde courbe, dirigés en sens contraires des rayons r, r', de la première, on aura constamment :

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} + \frac{r}{R_{,}} + \frac{r'}{R'_{,}} = \frac{4a}{p'}.$$

3. Supposons, maintenant, que la seconde courbe est une hyperbole (*fig.* 24).

Lorsque l'extrémité du rayon vecteur FD ou R appartiendra à la branche DM′D′ dont tous les points sont situés, par rapport à la directrice GG′, du même côté que le foyer F commun aux deux courbes, on aura toujours :

$$R = p' + e'X; \qquad (3)$$

et par conséquent :

$$\frac{r}{R} = \frac{r - e'x}{p'}, \quad \text{ou} \quad \frac{r}{R} = \frac{r + e'x}{p'},$$

suivant que r, R seront dirigés dans le même sens ou en sens contraires.

Mais si le rayon considéré est la droite FM dont l'extrémité appartient à la seconde branche de l'hyperbole, la valeur absolue de R sera donnée par la formule $R=-(p'+e'X)$, comme il est facile de le voir, en abaissant du point M une perpendiculaire MG' sur la directrice. Alors on a :

$$\frac{r}{R}=-\left(\frac{r+e'x}{p'}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{r}{R}=-\left(\frac{r-e'x}{p'}\right),$$

suivant que r et R ont la même direction ou des directions opposées.

Enfin, lorsque Fd ou r coïncide avec l'une des deux droites Fb, Fa, menées par le foyer F parallèlement aux asymptotes à la branche DD' de l'hyperbole, on a $R=\infty$, et $\frac{r}{R}=0$.

Cela posé, menons une droite du point b au centre C de l'ellipse, que nous supposons situé dans l'angle bFa ; l'extrémité b' du diamètre bCb' peut avoir trois positions différentes : ce point sera extérieur ou intérieur à l'angle bFa (*figures* 24 et 25), ou bien il coïncidera avec le point a (*fig.* 26).

1° Le point b' étant (*fig.* 24) hors de l'angle bFa ; quelle que soit la direction donnée au diamètre de l'ellipse, les rayons vecteurs r, r', menés aux extrémités du diamètre, ne pourront être situés, tous deux, dans l'intérieur de l'angle bFa.

Si les rayons r, r', ont les directions Fd, Fd', extérieures à bFa, les droites Fd, Fd', prolongées, s'il est nécessaire, rencontreront la première branche de l'hyperbole en des points D,D', et on aura :

$$\frac{r}{R}=\frac{Fd}{FD}=\frac{r-ex}{p'}, \quad \frac{r'}{R'}=\frac{Fd'}{FD'}=\frac{r'-e'x'}{p'},$$

par conséquent :

$$\frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Si l'un des rayons Fm, ou r, est dans l'angle bFa, l'autre Fm', ou r', sera hors de cet angle ; dans ce cas, prolongez la droite mF jusqu'à ce qu'elle rencontre la seconde branche de l'hyperbole en un point M. Il en résultera :

$$\frac{r}{R}=\frac{Fm}{FM}=-\frac{(r-e'x)}{p'}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{r'}{R'}=\frac{Fm'}{FM'}=\frac{r'-e'x'}{p'};$$

d'où :

$$\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Enfin, lorsque r, r', sont Fb, Fb', on a $\frac{r}{R}=0$, et

$$\frac{r'}{R'}=\frac{Fb'}{FB'}=\frac{r'-e'x_{\prime}}{p'}.$$

Mais $r'-e'x'=2a-2e'c\cos\delta$. En effet, $\frac{1}{e'}$ représentant le cosinus de l'angle bFX, que l'une des asymptotes de l'hyberbole fait avec l'axe focal de cette courbe, l'abscisse x du point b est égale à $Fb\times\frac{1}{e'}$, donc $x=\frac{r}{e'}$, ou $e'x=r$.

On a de plus (§ 1, pages 150, 151),

$$r'=2a-r,\quad x'=2c\cos\delta-x;$$

ces équations donnent immédiatement :

$$r'-e'x'=2a-2e'c.\cos\delta.$$

Ainsi :

$$\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c.\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

2° Quand le point b' est dans l'angle bFa (*fig.* 25), les rayons vecteurs r, r', peuvent être dirigés suivant des droites

Fm, Fm', intérieures à cet angle. Ces rayons prolongés rencontreront la seconde branche de l'hyperbole en des points M, M', et on aura :

$$\frac{r}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{F}m}{\mathrm{FM}}=-\left(\frac{r-e'x}{p'}\right),\quad \frac{r'}{\mathrm{R}'}=\frac{\mathrm{F}m'}{\mathrm{FM}'}=-\left(\frac{r'-e'x'}{p'}\right);$$

d'où :

$$\frac{r}{\mathrm{R}}+\frac{r'}{\mathrm{R}'}=\frac{2e'c\cos\delta-2a}{p'}=\frac{2a}{p'}(ee'\cos\delta-1).$$

Si l'un des rayons r, ou Fd, est intérieur, et l'autre, Fd', extérieur à l'angle bFa, en prolongeant le premier jusqu'à la rencontre de la seconde branche de l'hyperbole, il en résultera :

$$\frac{r}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{F}d}{\mathrm{FD}}=-\left(\frac{r-e'x}{p'}\right);\quad \frac{r'}{\mathrm{R}'}=\frac{\mathrm{F}d'}{\mathrm{FD}'}=\frac{r'-e'x'}{p'};$$

et par suite : $\dfrac{r}{\mathrm{R}}-\dfrac{r'}{\mathrm{R}'}=\dfrac{2e'c\cos\delta-2a}{p'}$.

Enfin en donnant aux rayons r, r', les directions Fb, Fb', on trouve : $\dfrac{r'}{\mathrm{R}'}=\dfrac{2e'c.\cos\delta-2a}{p'}$, $\dfrac{r}{\mathrm{R}}=0$.

3° Lorsque les points b, a, sont les extrémités d'un diamètre de l'ellipse (*fig.* 26), les rayons vecteurs r, r', menés du foyer aux extrémités d'un autre diamètre, seront toujours : l'un, Fd, extérieur, et l'autre, Fd', intérieur à l'angle bFa. On prolongera Fd' jusqu'à la seconde branche de l'hyperbole en D', et on aura :

$$\frac{r'}{\mathrm{R}'}=\frac{\mathrm{F}d'}{\mathrm{FD}'}=-\left(\frac{r'-e'x'}{p'}\right),\quad \frac{r}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{F}d}{\mathrm{FD}}=\frac{r-e'x}{p'};$$

d'où :

$$\frac{r}{\mathrm{R}}-\frac{r'}{\mathrm{R}'}=\frac{2a-2e'c\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta).$$

Mais $2a-2e'c\cos\delta=0$. En effet, $\dfrac{1}{e'}$ représentant le cosinus de l'angle que les asymptotes de l'hyperbole font avec l'axe

FX de la courbe, la somme des abscisses des points b, a, est égale à $\frac{\mathrm{F}b+\mathrm{F}a}{e'}=\frac{2a}{e'}$. D'ailleurs la somme des mêmes abscisses est $2c.\cos\delta$; on a donc $\frac{2a}{e'}=2c.\cos\delta$,

ou $$2a-2e'c.\cos\delta=0.$$

Par conséquent, on aura constamment $\frac{r}{\mathrm{R}}-\frac{r'}{\mathrm{R}'}=0$. Ce qui donne la proportion :

$$\mathrm{F}d:\mathrm{F}d'::\mathrm{FD}:\mathrm{FD}'.$$

On pourrait encore supposer que le centre C de l'ellipse est situé hors de l'angle $b\mathrm{F}a$, ou sur l'un des côtés de cet angle, mais l'examen de ces deux cas ne donnerait lieu à aucune observation nouvelle. D'après ce qui précède, il sera toujours facile de voir dans quels sens on doit prendre les rayons R, R′ pour que la somme ou la différence des rapports $\frac{r}{\mathrm{R}}$, $\frac{r'}{\mathrm{R}'}$, soit constante, pour toutes les directions données au diamètre de l'ellipse.

4. Il reste à démontrer le théorème, dans l'hypothèse où la première courbe est une hyperbole (*fig.* 27).

En conservant la notation adoptée (§ 1, pages 150 et 151), et disposant les axes des coordonnées de la même manière, on aura évidemment :

$$r-r'=\mathrm{F}d-\mathrm{F}d'=2a\ldots\ (1),\quad \text{et}\quad x+x'=2.c.\cos\delta\ldots\ (2).$$

Si la seconde courbe est une ellipse ou une parabole, la valeur absolue du rapport $\frac{r}{\mathrm{R}}$ sera donnée par l'une ou l'autre des formules :

$$\frac{r}{\mathrm{R}}=\frac{r-e'x}{p'}\ldots\ (3),\ \text{ou}\ \frac{r}{\mathrm{R}}=\frac{r+e'x}{p'}\ldots\ (4),$$

suivant que R et r seront dirigés dans le même sens, ou en sens contraires (§ 2, page 151); et de même :

$$\frac{r'}{R'}=\frac{r'-e'x'}{p'} \ldots\ (5), \text{ ou } \frac{r'}{R'}=\frac{r'+e'x'}{p'} \ldots\ (6).$$

En retranchant l'équation (6) de l'équation (3), membre à membre, il vient :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{r-r'-e'(x+x')}{p'};$$

d'où :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2a-2e'c.\cos\delta}{p'}=\frac{2a}{p'}(1-ee'\cos\delta) \ldots\ (7);$$

et si l'on retranche l'équation (5) de (4), il en résulte :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}=\frac{2a}{p'}(1+ee'\cos\delta) \ldots\ (8).$$

Dans chacune des relations (7) et (8), r représente le plus grand des deux rayons vecteurs menés du foyer F aux extrémités d'un diamètre de l'hyperbole. La première de ces deux formules, (7), convient au cas où R, r, ont la même direction, et R$'$, r', des directions opposées. Dans la seconde, (8), on suppose, au contraire, les rayons R, r, en prolongement l'un de l'autre, et r', R$'$, dirigés dans le même sens.

Remarque. Si R_1, R'_1, représentent des rayons de sens contraires à r, r', on aura :

$$\frac{r}{R}-\frac{r'}{R'}+\frac{r}{R_1}-\frac{r'}{R_1'}=\frac{4a}{p'}.$$

Lorsque la seconde courbe considérée est aussi une hyperbole, on trouve encore, au moyen des formules établies (N. 3, page 153), que la somme ou la différence des rayons r, r', divisés respectivement par les rayons de la seconde courbe, dirigés suivant les mêmes droites que les premiers, est constante. G.